令和７年度（2025 年度）入学試験（令和６年（2024 年）８月実施）

問題２：必答問題

問１【運動方程式】

(a)

物体の運動方程式は、

$$Ma = T - Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$$

重りの運動方程式は、

$$ma = mg - T$$

(b)

(a) より、

$$a = \frac{mg - Mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{M + m}$$

$$T = mg - m\frac{mg - Mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{M + m} = \frac{mMg(1 + \sin\theta + \mu\cos\theta)}{M + m}$$

(c)

$a > 0$の条件より、

$$m > M(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

(d)

ロープがちぎれたあとの物体の運動方程式より、物体の加速度は、

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

これと、初速v_1、時間t後に距離Lまで進んだ時の速さv_2との関係は、

$$v_2 = at + v_1$$

$$L = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t$$

両式からtを消去してv_2について整理すると、

$$v_2 = \sqrt{{v_1}^2 - 2gL(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$$

（別解）力学的エネルギーの保存を考えると、

$$\frac{1}{2}M{v_2}^2 + MgL\sin\theta + \ \mu MgL\cos\theta = \frac{1}{2}M{v_1}^2$$

これをv_2について整理する。

問２【剛体の回転運動】

（a）

角運動量は、回転軸まわりの慣性モーメントIと角速度ωを用いて、$I\omega$と書ける。
角速度ωは、与えられた数値を用いて、$\omega = 2\pi \times \frac{3.5}{0.6}$ である。
したがって、角運動量は、$2 \times 2\pi \times \frac{3.5}{0.6} \cong 7 \times 10$ kg m^2 s^{-1}。（有効数字は 1 桁であると解釈。）

（b）

回転エネルギーは、$\frac{1}{2}I\omega^2$。角速度を $\frac{4.5}{3.5}$ 倍にするので、回転エネルギーは $\left(\frac{4.5}{3.5}\right)^2$ 倍、つまり、1.7 倍。

（c）

角運動量$I\omega$の保存により、角速度は 4 分の 1 となった。あるいは、2 rad s^{-1} から 0.5 rad s^{-1} に変化したので、変化量は -1.5rad s^{-1}。
手や片足や上半身を、回転軸（もう片方の足もしくは両足）から離し、慣性モーメントを大きくしたと考えられる。
（フィギアスケートのスピンのさまざまなフォームを調べて確認しておくとよいでしょう。）

問３【熱力学】

気体が外部にした仕事Wは、

$$W = \int PdV$$

理想気体 n mol の状態方程式は

$$PV = nRT$$

であり、断熱変化前後で

$$P_1V_1 = nRT_1$$
$$P_2V_2 = nRT_2$$

が成り立つ。

さらに、理想気体の断熱変化においては、（比熱比 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ を用いて） PV^γ が一定であり、

$$PV^\gamma = P_1{V_1}^\gamma = P_2{V_2}^\gamma$$

が成り立つ。

したがって、体積がV_1からV_2まで断熱変化した時、

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1{V_1}^\gamma}{V^\gamma} dV = P_1{V_1}^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}\,dV = \frac{1}{\gamma - 1}(P_1V_1 - P_2V_2)$$

（最後に$P_1{V_1}^\gamma = P_2{V_2}^\gamma$の関係を用いて式を整理してある。）