令和７年度（2025 年度）入学試験（令和６年（2024 年）８月実施）

問題１：必答問題

問１【微分方程式】

(a)

$y = e^{\lambda x}$ の形の解を考えて、これを式に代入すると、特性方程式は $(\lambda - 1)^2 = 0$。
$\lambda = \lambda_1, \lambda_2$が異なる場合は、一般解は$C_1$と$C_2$を任意定数として、$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ です。

しかし、今回、$\lambda = 1$ は重根です。この場合、一般解は、$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$ となります。
（ひとつの基本解 $e^{\lambda_1 x}$ が分かっている時、 $c(x) e^{\lambda_1 x}$ を作りこれを元の式に入れてみると、$c(x) = ax + b$ となります。したがって、もうひとつの基本解は $x e^{\lambda_1 x}$ であると分かります。）

したがって、解は、$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$。

(b)

これは変数分離ができる形の微分方程式です。

$$\frac{dy}{y} = -x\, dx$$

両辺を積分して、

$$\log y = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

両辺を（eを底とする）指数関数の肩に乗せて

$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

（$C = e^{C_1}$）

問 2 【積分】

部分積分を 2 回使うと積分記号が外せます。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^2\, e^{-x} dx \\
&= [-x^2 e^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty -2x\, e^{-x} dx \\
&= 2\int_0^\infty x\, e^{-x} dx \\
&= 2\left\{[-xe^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-x} dx\right\} \\
&= 2\left\{\int_0^\infty e^{-x} dx\right\} \\
&= 2[-e^{-x}]_0^\infty \\
&= 2
\end{aligned}
$$

問３【ベクトル】

ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系（直交直線座標系、直角座標系、$x-y-z$ 座標系）での成分表記を用いるのが簡便です。

ここでは、３次元空間における原点からの距離 r を

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と表記することにします。また、$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ は、３次元空間における位置ベクトルです。

まず、

$$\boldsymbol{\nabla} r^2=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}=2\,\boldsymbol{r}$$

次に、

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{\nabla} r^2=\boldsymbol{i}\times 2\,\boldsymbol{r}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}$$

最後に、

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(2\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}\right)=2\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-z\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1+1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=4\boldsymbol{i}$$

問4【行列】$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a)

単位行列を$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と書くことにすると、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は、以下の式から計算します。

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$$

これを λ について解くと、$\lambda = 1, 3$。

固有ベクトルは、それぞれの λ について $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を解く。(a)の範囲では規格化はしなくてよいです。

固有値$\lambda = 1$の固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$の定数倍、固有値$\lambda = 3$の固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$の定数倍。

(b)

答え：

変換先の図形は、原点を中心とし、長軸が$y = x$に沿い、短軸が$y = -x$に沿う楕円で、長半径が 3、短半径が 1。

解説：

まずは、逆行列の公式を覚えている前提で、シンプルに考えてみます。行列 $\boldsymbol{A}$ による一次変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書け、両辺に左から $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ をかけると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列は（公式を用いて）$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ですので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}$$

(x, y) は $x^2 + y^2 = 1$ を満たすので、(x', y') は計算して整理すると

$$5x'^2 - 8x'y' + 5y'^2 = 9$$

を満たすことになります。
これは楕円です。
（楕円の一般式は、$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$、$B^2-4AC<0$ です。）

しかし、上記だけではすぐには図は描けなさそうですので、次に(a)をヒントととらえ、行列 $\boldsymbol{A}$ を（a）で求めた固有値と固有ベクトルを用いて対角化し、 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$ の形に書き直して考えてみましょう。

まず、固有ベクトルを規格化しておきます。

固有値$\lambda=1$の固有ベクトルは$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$、固有値$\lambda=3$の固有ベクトルは$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$。

次に、$\boldsymbol{P}$ は、固有ベクトルの要素を使って

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

さらに、$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}$ を満たすように $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めると、

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

これは、45° の回転行列です。

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}$$

さらに（したがって）、$\boldsymbol{P}$ は（すぐに）次のように書けます。

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix}$$

つまり、行列 $\boldsymbol{A}$ による一次変換は、

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

と書き表すことができます。これは、点$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$を、（右から順に）まず原点に対して反時計回りに 45° 回転した点に移し、次にx成分を 1 倍、y成分を 3 倍した点に移し、最後に原点に対して時計回りに 45° 回転する、という変換をおこなっていることになります。

今回点$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$は半径 1 の円上の点ですので、はじめの「反時計回りに 45° 回転」では見た目上何もおこらず同じ円のままで、次の「x成分を 1 倍、y成分を 3 倍した点に移す」ところで、長軸がy軸に沿い長半径 3、短軸がx軸に沿い短半径 1 の楕円に変換され、最後の「時計回りに 45° 回転」により、長軸が$y = x$に沿い、短軸が$y = -x$に沿う楕円となる、ということが分かります。

あるいは、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点のうち例えば $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ や $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ がそれぞれどこに動くか、（実際に図を描いて）、考えてみるのもよいでしょう。

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to (0, 1) \to (0, 3) \to \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to (-1, 0) \to (-1, 0) \to \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

前者は元の点の 3 倍先へ移りますが、後者は元の点に戻ります。さらに必要あれば、もう数点についても考えてみましょう。

応用問題１：

a と b（$a \neq b$）を実数として、2×2の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ による一次変換は、同様に、回転と伸縮の合成となります。この場合の固有値と固有ベクトルを求めてみましょう。

応用問題２：

2×2の対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の場合はどうなるでしょう？

（ヒント：2×2の直交行列には、回転行列$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$と、原点を通る直線（傾き$\frac{\theta}{2}$）に対する折り返し（反転、鏡映）行列$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$とがあります。たとえば：

https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_matrix）