令和６年度（2024 年度）入学試験（令和５年（2023 年）８月実施）

問題２：必答問題

問１【物体の衝突】

（a）
運動量保存則の式は、

$$mV_1 = (m + M)V_2$$

（b）
力学的エネルギー保存則の式は、

$$\frac{1}{2}(m + M){V_2}^2 = (m + M)g(L - L\cos\theta)$$

（c）
（b）より、$V_2 = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$。これを（a）に代入して、

$$V_1 = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$$

問２【剛体の回転運動】

（a）

質量中心の運動エネルギーは $\frac{1}{2}M{V_1}^2$。

質量中心の回転エネルギーは、円筒の回転中心軸周りの慣性モーメントをI、回転運動の角速度をΩとすると、$\frac{1}{2}I\Omega^2$。

次に慣性モーメント I を求めます。

（剛体におけるある回転軸のまわりの慣性モーメント I は、剛体内の質量の要素 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとすると、$I \equiv \sum m_i\, {r_i}^2$ です。その単位は kg m^2 です。）

円筒の I は、$m_i = \frac{M}{2\pi R} \cdot Rd\theta$（このように書ける理由は図 1 を参考にして考えてみてください）より、$I \equiv \sum m_i\, {r_i}^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{M}{2\pi R} \cdot Rd\theta \right) \cdot R^2 = MR^2$

さらに、滑らずに転がる、という条件より、$V_1 = R\Omega$が成り立ちます。

したがって、$\frac{1}{2}I\Omega^2 = \ldots = \frac{1}{2}M{V_1}^2$。

したがって、運動エネルギーと回転エネルギーの和は$M{V_1}^2$。

別解：

円筒の回転エネルギーが $\frac{1}{2}M{V_1}^2$ となることは、次のように考えて導き出すこともできます。剛体を質点の集まりとしてみて、質点の運動エネルギーの総和を考えます。一般に剛体がある回転軸の周りを角速度 Ω で回転するとき、回転軸からの距離 r_i にある質量 m_i の質点の速さ v_i は $v_i = r_i\Omega$ であり、その運動エネルギーは $\frac{1}{2}m_i(r_i\Omega)^2$ となります。円筒の場合、$m_i = \frac{M}{2\pi R} \cdot Rd\theta$、$r_i = R$ であることから、θ で一周積分すると運動エネルギーは $\frac{1}{2}M(R\Omega)^2$。さらに、滑らずに転がる、という条件 $V_1 = R\Omega$ を使います。

（b）

円筒の回転軸まわりの慣性モーメントは（a）で求めたように、MR^2。

いっぽう、円柱の回転軸まわりの慣性モーメントは、密度が一様な場合、

- 円柱の単位体積あたりの密度 ρ は、円柱の高さを L とすると、$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$ である。
- 円柱を、図 1 に示すように、回転軸からの距離 r にある微小幅 dr の微小体積要素 $\Delta V = dr \times 2\pi r \times L$ （つまり、半径 r 高さ L の「円筒」）の集合体と考える（r は 0 から R まで変化する）。
- $I \equiv \sum m_i {r_i}^2 = \int_0^R (\rho \cdot \Delta V) \cdot r^2$を計算すると、$I = \frac{1}{2} MR^2$ となる。

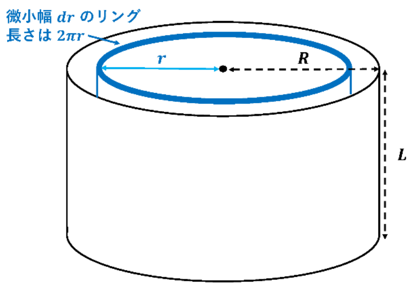

図 1：　回転軸からの距離 r にある微小幅 dr の微小体積要素（円筒）の体積 ΔV が $\Delta V = dr \times 2\pi r \times L$ であることを示す図。

つまり、円筒と円柱では、質量が同じならば、円柱の方が慣性モーメントが小さい。

円筒や円柱が、高さ h を転がり下りた時の速さを V とすると、力学的エネルギー保存の式は慣性モーメントを I として次のように書けます。

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{V}{R}\right)^2 = Mgh$$

ここで、左辺第一項は質量中心の運動エネルギー、左辺第二項が回転エネルギー$\frac{1}{2}I\Omega^2$で滑らず転がる条件 $V = R\Omega$ を考慮しています。左辺をさらに V^2 でくくれば

$$\frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)V^2 = Mgh$$

円筒と円柱では、（いま右辺は両者で等しいですから）、円柱の方が I が小さいため、円柱の方が V が大きくなります。

（なお、問題文からみて、慣性モーメントの値は具体的に求めなくてもよさそうです。慣性モーメントの定義を説明し、円筒と円柱では円柱の方が慣性モーメントが小さいことを指摘したのち、エネルギー保存則を用いて速さの大小を議論するのでもよいでしょう。）

追加の解説：

はじめの位置エネルギーが、坂を転がり落ちるにつれて、(1)重心の並進運動のエネルギーと(2)回転運動のエネルギーに分配されます。分配の様子は物体の形状により異なってきます。物体の形状により慣性モーメント（回転運動に対する慣性の大きさ、回転のしにくさ）の値が違っていて、慣性モーメントが大きい物体では回転運動の方にエネルギーをより多く取られ、並進運動のエネルギーが小さく（加速度の大きさが小さく）なります。

剛体におけるある回転軸のまわりの慣性モーメント I は、剛体内の質量の要素 m_i が回転軸からの距離 r_i にあるとすると、$I \equiv \sum m_i r_i^2$ です。その単位は kg m^2 です。質量が回転軸からより遠いところにより多く分布していると、慣性モーメントは大きくなります。球と円柱と中空の円筒を比べると、球、円柱、中空の円筒、の順に慣性モーメントが大きくなります。
（正確には、こういった丸い物体についてはその質量 M と半径 R を用いて、$I = cMR^2$ という形に書けて、係数 c （これを慣性モーメント比と呼びます）の大小で決まります。）

円筒や円柱や球が坂を滑らずに転がり落ちる問題は、最近よく出題されています。

重心の並進運動の方程式、回転の運動方程式がどのように書けるか、さらに、滑らず転がる場合の並進の速さと回転角速度との関係がどうなっているか、確認しておきましょう。
また、球、円柱、円筒のそれぞれの慣性モーメント・慣性モーメント比 c を一度自分で算出しておきましょう。
前々年度の夏の院試の必答問題[1]の解答例・解説[2]にて詳しく解説していますので、一度そちらをじっくり読んで解いてよく理解しておくとよいでしょう。

---

[1] 令和 3 年度（2021 年度）大学院修士課程入学試験課題（令和 2 年（2020 年）7〜8 月・オンライン実施）、課題 2：必答課題、問 2【sen21m.pdf】

[2] 2021 年度入学試験(2020 年 8 月オンライン実施）課題 2：必答課題【answer20-2_v1.0.pdf】

問 3 【熱力学】

気体が外部にした仕事Wは、

$$W = \int PdV$$

1 mol の理想気体の状態方程式は

$$PV = RT$$

したがって、$T = T_1$（一定）で、体積がV_1からV_2まで膨張した時、

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$