2022 年度入学試験（2021 年 8 月実施）　問題１：必答問題

問１【ベクトル】

まずは、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「2 ベクトル」を読んでください。そこには「ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系（直交直線座標系、直角座標系、$x-y-z$ 座標系）での成分表記を用いるのが簡便である。」と書かれています。煩雑にはなるかもしれませんが、成分表記して、ひとつひとつ間違えないように注意して我慢強く計算を進めていけば、確実に答えにたどりつきます。

また、ひとつ前の年の8月の試験（「2021年度入学試験（2020年8月オンライン実施）　課題１：必答課題」の問１）、および、ふたつ前の年の8月の試験（「2020年度入学試験（2019年8月実施）　問題１：必答問題」の問３）の解答例・解説も参照してください。以下ではそれらに書いたやり方（表記のしかた）で進めていきます。

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

なお、それぞれの問題の演算結果が、ベクトルになるか、スカラーになるか、にまず注意しましょう。

(a)

内側から順番に計算していきます。

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_y z - b_z y \\ b_z x - b_x z \\ b_x y - b_y x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_y z - b_z y \\ b_z x - b_x z \\ b_x y - b_y x \end{pmatrix} = a_x(b_y z - b_z y) + a_y(b_z x - b_x z) + a_z(b_x y - b_y x)$$

$$\nabla\{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r})\}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\left\{a_x\left(b_yz-b_zy\right)+a_y(b_zx-b_xz)+a_z\left(b_xy-b_yx\right)\right\}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

（b）

これも内側から順番に計算していきます。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=a_xx+a_yy+a_zz$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}=\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_x\\\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_y\\\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_z\end{pmatrix}$$

$$\nabla\times\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}\}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_x\\\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_y\\\left(a_xx+a_yy+a_zz\right)b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

つまり、(a) と (b) は同じ答え $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ となります。

（c）

$|\boldsymbol{r}|^2=x^2+y^2+z^2$ なので、

$$\nabla|\boldsymbol{r}|^2=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}=2\boldsymbol{r}$$

問２【行列】

解答例は、

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、

さらに、$\omega = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$として、$\omega^3 = 1$ であることにも注意して、

固有値 $\lambda = 2\omega = -1 + i\sqrt{3}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 、

固有値　$\lambda = 2\omega^2 = -1 - i\sqrt{3}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

以下に解説を書いていきます。

2×2や3×3の行列 A の固有値 λ と固有ベクトル u を求める問題はよく出題されますので、手順を確認し、実際の問題をいくつか解いて練習しておくとよいでしょう。ひとつ前の年の８月の試験（「2021年度入学試験（2020年８月オンライン実施）　課題１：必答課題」の問２）、および、ふたつ前の年の８月の試験（「2020年度入学試験（2019年８月実施）問題１：必答問題」の問１）の解答例・解説も参照してください。

今回は3×3の行列です。単位行列を $\boldsymbol{E}$ と書くことにします。

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は、以下の式から計算します。

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}\,| = 0$$

ここで、$|\cdots|$ の記号は、中の行列の行列式（の値を算出する）、という意味です。3×3の行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

です。これは「サラスの方法 / たすきがけの方法」（ひとつ前の年の８月の試験の解答例・解説も参照）で暗記しておきます。

今回の問題では、具体的には、

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&2\\2&-\lambda&0\\0&2&-\lambda\end{pmatrix}$$

ですので、$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$より

$$(-\lambda)^3+2^3-\{0\}=0$$

つまり

$$\lambda^3-2^3=0$$

$\lambda=2$ が解のひとつであるから、$(\lambda-2)$ でくくれるはずで、かつ、λ^3 と 2^3 が作れるように考えると、係数 a を考えて、

$$(\lambda-2)(\lambda^2+a\lambda+2^2)=0$$

これを解いて、$a=2$。

$$(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+2^2)=0$$

したがって、λ は 2 と $-1+i\sqrt{3}$ と $-1-i\sqrt{3}$ とでます。ここで、$i=\sqrt{-1}$ （$i^2=-1$）は虚数単位。

つまり、固有値は 2 と $-1+i\sqrt{3}$ と $-1-i\sqrt{3}$、です。

【ここで $\lambda^3-2^3=0$ を別の考え方で解いてみよう】

この形の方程式は、複素平面（図１）を考えて

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を利用して解くことができます。この方法の方が幾何学的な意味を追いながら解けますので、慣れておけば、分かりやすく間違えにくいのではないでしょうか。また、このような複素数が絡む問題も（大気、海洋の問題において）頻出ですので、ここで復習しておきましょう。

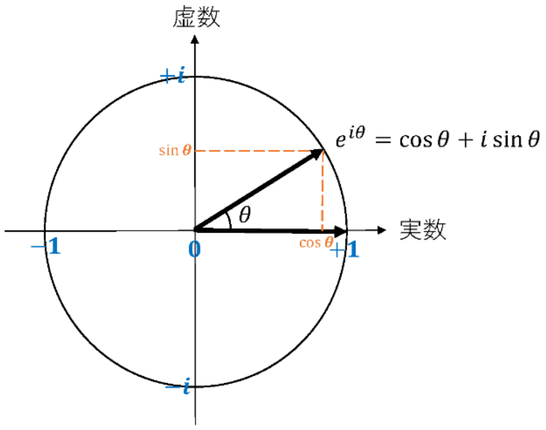


図１：複素平面と $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 。

今回は、

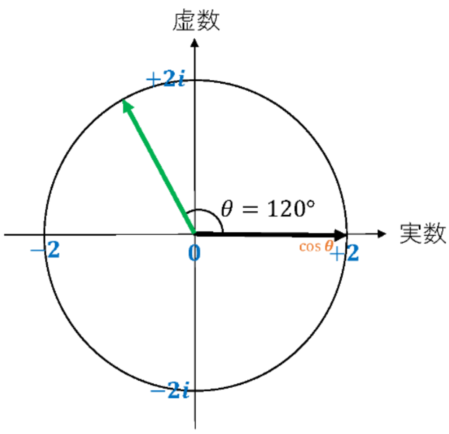
$$\lambda = 2\,e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおいて、$\lambda^3 - 2^3 = 0$ 、つまり

$$e^{i3\theta} = 1\ (= e^{2m\pi}, m = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

を θ について解きます。

つまり、$3\theta = 0\ (0), 360\ (2\pi), 720\ (4\pi), \ldots$ ですので、$\theta = 0°(0), 120°\left(\frac{2}{3}\pi\right), 240°\left(\frac{4}{3}\pi\right), \ldots$ （下の図２ は$120°\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ の場合ですが、➡をあと２回まわすと➡に戻ります。）



図：$\lambda = 2\,e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ において、$\theta = 120°\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ の場合。

したがって、答えは

$\lambda = 2\, e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\ (\theta = 0°(0)),\qquad 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta = 120°\ \left(\frac{2}{3}\pi\right)\right),\qquad 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta = 240°\ \left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$

となります。(➡をさらにまわしても、答えはこれら 3 つだけです。）さきほど 3 次方程式を機械的に解いた結果と同じになりますね。

なお、$\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{i2\theta}$ ですので、(…少し考えると…)、$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となっています。従って、$\omega = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と置くことにすると、固有値は、$2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$ となります。

（なお、$\omega^3 = 1$ ですね。）

<u>このようにスマートに書いておくと、次の固有ベクトルを求めるところで計算が煩雑にならずかなり楽に（したがって間違えにくく）なります。</u>

さて、最後に、固有値ひとつずつについて、それぞれの固有ベクトルを求めます。（この過程で固有値の計算の確かめ算もできることになります。固有ベクトルが求められない場合は固有値が間違っています。）

固有値と固有ベクトルには、以下の式を満たす、という性質があります

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = 0$$

ですので、そのように式を立てて $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ の u_1 と u_2 と u_3 の値を求めます。

$\lambda = 2$ の場合： $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

$\lambda = 2\omega$ の場合： $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 。（$\omega^3 = 1$ であることに注意します。）

$\lambda = 2\omega^2$ の場合： $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 。（$\omega^3 = 1$ であることに注意します。）

問３【積分】

（a）部分積分を用います。

解答例は、

$$\frac{1}{6}x^6\left(\log x - \frac{1}{6}\right) + C$$

です。以下に解説を書きます。

まず、念のため、部分積分を復習しておきます。
（「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」とは、使用する記号が異なりますが、言っていることは同じです。）
部分積分とは、積分の中の関数がふたつの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積になっている時、

$$\int f(x)\,g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)\,G(x)dx$$

となることを利用して解く方法のことですね。ここで　′ はxで微分する、の意味で、$G(x)$ は $g(x)$ の積分、$G'(x) = g(x)$、もしくは、$G(x) = \int g(x)dx$ である関数です。
（部分積分は「げん・せき・ひく・び・せき」などと言って覚えるでしょうか。）
なお、この公式を忘れてしまったら、$\left(f(x)G(x)\right)'$を以下のように分解してみるとよいでしょう：

$$\left(f(x)G(x)\right)' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

（右辺第一項を左辺に移した上で、この両辺を x で積分します。）
なお、上記は不定積分の場合ですが、定積分の場合も同様で

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)dx$$

となります。

実際の問題で、積分の中の関数のどれを $f(x)$ としどれを $g(x)$ とするとうまく解けるか、についてはいくつかのパターンがあります。

- 1 回もしくは複数回微分すると定数になるものを $f(x)$ とする
- $\log x$ を$f(x)$ とする（ $(\log x)' = 1/x$ であることがうまく活用できる場合）
- 三角関数が入っていて、2 回部分積分をすると、もとの関数が現れる場合

問題集等を参照し、ひととおりのパターンについて、実際に解いてみておいてください。

今回の問題 $\int x^5 \log x \, dx$ の場合は、$\log x$ を $f(x)$ とします。書く順番を変えて、

$$\int \log x \;\; x^5 \;\; dx$$

$$= \log x \, \frac{1}{6}x^6 - \int \frac{1}{x} \; \frac{1}{6}x^6 \, dx$$

$$= \log x \, \frac{1}{6}x^6 - \int \frac{1}{6}x^5 \, dx$$

$$= \log x \, \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}x^6 \; + \; C$$

これは不定積分なので、積分定数 C を忘れずに。
また、さらにもう少し整理して、

$$= \frac{1}{6}x^6 \left(\log x \; - \; \frac{1}{6}\right) \; + \; C$$

となります。

（b）線積分・ベクトルの積分

まずは、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「4.4 線積分・ベクトルの積分」を読んでください。

この問題は、まずは内積を計算してみてしまうと、

$$\int_C \; \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

を積分路 C 、直交直線座標系 (x, y) における原点を中心とする半径 1 の円、に沿って積分しなさい、という意味です。

これは、極座標（円座標） (r, θ) に変換してみるのがよさそうでしょうか。その上で、$r = 1$ に固定して、θ を 0 から 2π まで積分することになりそうです。

$$x = r\cos\theta \, , \qquad y = r\sin\theta$$

$$dx = dr\cos\theta - r\sin\theta \, d\theta \, , \qquad dy = dr\sin\theta + r\cos\theta \, d\theta$$

従って、
$x\,dx + y\,dy = \cdots = r\,dr$ 、また、$\sqrt{x^2+y^2} = r$
従って、

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int_C \frac{1}{r}\, r\, dr$$

$= \int_C dr = 0\ (\because r = 1)$ （$r = 1$ つまり定数なので、そもそも $dr = 0$ ですね。）

別の考え方をしてみましょう。ここでの内積の意味を幾何学的に考えてみましょう。以下のように書き換えてみて、

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

つまり、原点を中心とする半径 1 の円、の各点において、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ という内積を取るわけですが、円周上においては $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ は直交していますから、この内積は常にゼロです。

（ベクトル$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$は原点から外側、円弧に直交する向きのベクトルであり、いっぽうのベクトル$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$は円弧の接線に沿った向きのベクトルです。円周に対応するベクトル$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とベクトル$\begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \end{pmatrix}$とベクトル$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$を自分で図示して確認してみましょう。）

さらに別の考え方をしてみましょう。「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「4.4 線積分・ベクトルの積分」の「ベクトルの積分」～「ストークスの定理」にしたがいます。

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\boldsymbol{r} \left(= \boldsymbol{i}F_x + \boldsymbol{j}F_y = \boldsymbol{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \boldsymbol{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

（というふうに、$\boldsymbol{r}$ と r などを定義します。）すると問題の式は、ストークスの定理により以下のように面積分に変換できて、

$$\int_C \frac{1}{r}\,\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,dxdy$$

ここで、

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = y\frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) - x\frac{-1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2y) = 0$$

つまり中身がゼロですから面積分もゼロとなります。

（ここでの“$\boldsymbol{F}$”はどのような“力”でしょうか？）

また、ここで出てきた $\frac{1}{r}\boldsymbol{r}$ が、$\boldsymbol{\nabla} r$ と等しいことから（$\boldsymbol{\nabla} r = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}$ となることを自分で確かめてみましょう）、

$$\int_C \frac{1}{r}\ \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{\nabla} r \cdot d\boldsymbol{r}$$

と変形できますが、これは積分路に沿って（ある関数 r の）「勾配」を一周積算していく、という意味なので、積分路が閉曲線の場合は一周まわってもとに戻ったところで必ずゼロとなります。もちろん、ここでは積分路は原点を中心とする半径 1 の円なので、r は定数ですからその勾配はもともと常にゼロですが。

問4【微分方程式】

「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の一番最後に大変に重要なことが書かれています：

「微分方程式を解いたときには、得た解を元の式に代入して、それを満足するかどうかチェックすることをお勧めする。」

確かめ算やクロスチェックは、テストや試験だけでなく、研究活動においてもいつも非常に重要です。

（a）これは変数分離ができるパターンですね。

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -x\,dx$$

両辺を積分して

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx$$

$$\log\,|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C'$$

したがって、解は、

$$y = C\,e^{-x^2/2}$$

ここで、C', C は積分定数。

もちろん、必ず確かめ算もしましょう。$\frac{dy}{dx} = \cdots = -xy$ となりますか？

なお、もちろん、

$$y = C\,e^{-f(x)}$$

の形になるはずだろうと“あたり”をつけて、答えを導き出しても構いません。

（b）方針は：　まず対応する同次方程式の一般解を求め、次に非同次の項の特徴に注目して特解を求め、最後に初期条件から定数を決める。

まず、対応する同次方程式は、

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$e^{\lambda x}$ の形の解を考えて、

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

を解くと、$\lambda=-1\pm i$ であるから、$\lambda_1=-1+i$、$\lambda_2=-1-i$と書くことにして、上記の微分方程式の一般解は、C_1 と C_2 を積分定数として、

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

次に、本問題の非同次の項が（$\cos x-2\sin x$）と扱いやすそうな形をしているので、非同次の式、

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=\cos x-2\sin x$$

を満たす特解を求めることにします。

$$y=A\sin x+B\cos x$$

と置いて代入して整理すると、

$$(A-2B+2)\sin x+(2A+B-1)\cos x=0$$

これがすべての x で成り立つので

$$A-2B+2=0,\qquad 2A+B-1=0$$

これを解くと、$A=0,\ B=1$ となり、したがって、特解は $y=\cos x$。

したがって、本問題の非同次の式の一般解は、同次方程式の一般解と特解を足し合わせて、

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cos x$$

最後に、初期条件 $y(0)=1,\ \frac{dy}{dx}(0)=1$ より、C_1 と C_2 を決めます。

$$\frac{dy}{dx}=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}-\sin x$$

であるので、

$$C_1+C_2+1=1$$
$$C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=1$$

したがって、C_1 と C_2 は、

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$C_2 = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{i}{2}$$

したがって、解は、

$$y = \frac{-i}{2} e^{\lambda_1 x} + \frac{i}{2} e^{\lambda_2 x} + \cos x$$

このままでは、解は実数であるはずなのに、虚数単位 i が現れてしまっているので、$\lambda_1 = -1 + i$、$\lambda_2 = -1 - i$ を代入するとともに、問 2 で出てきた $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて変形し直して整理すると、解は、

$$y = e^{-x}\sin x + \cos x$$

となります。