2020年度入学試験（2019年8月実施）　問題１：必答問題

問１【行列】

（a）2×2 や 3×3 の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ と固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求める問題はよく出題されますので、手順を確認し、実際の問題をいくつか解いて練習しておきましょう。

解答例は：

固有値λは 4 と 1。固有ベクトルは$\lambda=4$ に対して$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$、$\lambda=1$ に対して$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

です。以下、解説を書いていきます。

単位行列を $\boldsymbol{E}$ と書くことにします。

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ は、以下の式から計算します。

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$$

ここで、$|\cdots|$ の記号は、中の行列の行列式（の値を算出する)、という意味です。

なお、行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の行列式は $ad-bc$ ですね。(行列式の意味、性質、その有用性については、教科書等で復習してみましょう。有用性のひとつは本問題(a)(b)で明らかになりますね。)

今回の問題では、具体的には、

$$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}6&-2\\5&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-\lambda&-2\\5&-1-\lambda\end{pmatrix}$$

ですので、$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$より

$$(6-\lambda)\times(-1-\lambda)-(-2)\times(5)=0$$

これを整理して解くと、λ は 4 と 1 とでます。

つまり、固有値は 4 と 1、です。

次に、固有値ひとつずつについて、それぞれの固有ベクトルを求めます。(この過程で固有値の計算の確かめ算もできることになります。固有ベクトルが求められない場合は固有値が間違っています。)

固有値と固有ベクトルには、以下の式を満たす、という性質があります

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = 0$$

ですので、そのように式を立てて$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ の u_1 と u_2 の値を求めます。

λ＝4 の場合：

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

これより、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

（なお、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とか $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ などでも構わない（つまり、定数倍しても構わない）のですが、一番シンプルなものにしておけばよいです。ただし、単位ベクトル、つまり、大きさ 1 のベクトルとせよ、と指定されている場合は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と答えなければなりません。）

λ＝1 の場合：

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

これより、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。（これが一番シンプルでしょう。もしも、単位ベクトル、つまり、大きさ 1 のベクトルとせよ、と指定されている場合は $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ となりますね。）

（b）行列の対角化（対角成分以外をすべてゼロに変換する）には、（a）で求めた固有ベクトルを用います。

解答例は：

$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

です。以下に解説を書いていきます。

行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化する、というのは、ある適切な行列 $\boldsymbol{P}$ とその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて、

$$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

という形にする、ということです。つまり、対角化された後の行列は、対角成分に行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値がならび、他の成分（非対角成分）がすべてゼロ、となります。

行列 $\boldsymbol{P}$ は、(a)で求めた固有ベクトルを並べて、以下のように作ります。

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

いっぽう、行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ は、(公式を暗記してもよいですがここでは)

・　固有ベクトルの成分を、少しアレンジし直して（並べ方と符号)、並べることになる
・　具体的には、行列 $(\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1})$ の非対角成分ひとつずつに注目して、それがゼロとなるように $\boldsymbol{P}^{-1}$ の成分を決める
・　行列 $(\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1})$ の対角成分が最終的に 1 となるように、係数をかける

ということさえ覚えておけば、現場で作り出せるでしょう。(いくつか異なる問題を解けば、結局「公式」(つまり手順）が身に着くでしょう。)
いろいろなやり方があるとは思いますが、以下に、私のやり方を少し詳しく説明してみます。（このやり方が唯一のやり方というわけではないでしょう。）

しかしその前に、行列のかけ算のちょっとした「こつ」、について解説しておきます：

【行列のかけ算のちょっとした「こつ」】

行列のかけ算 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ をおこなう時、以下のように$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ を並べて書くという方法があります。これにより、どの成分とどの成分をかければよいか、見通しがずっとよくなるのではないかと思います。

$$\begin{array}{cc} & (\boldsymbol{B}) \\ (\boldsymbol{A}) & (\boldsymbol{C}) \end{array}$$

たとえば、$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ の場合、

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix} \end{array}$$

と並べます。たとえば $c_1=5\times1+7\times2$ です。これは、以下のように見ています。

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix} \end{array}$$

また、$c_3=5\times3+7\times4$ です。これは以下のように見ています。

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix} \end{array}$$

同様にして、c_2 と c_4 についても計算してみてください。このやり方に慣れると、見通しがよくなり、計算間違いもしにくくなると思います。特に、3×3 以上の行列のかけ算や、正方でない行列同士のかけ算など、複雑になればなるほど、このやり方のよさが分かってくると思います。

さて、話を、行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 求めることに戻します。

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

ですので、

$$\begin{array}{cc} & (\boldsymbol{P}^{-1}) \\ (\boldsymbol{P}) & (\boldsymbol{E}) \end{array}$$

つまり、

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ここで、かけ算後の行列の非対角成分がゼロとならないといけない、という条件から $\boldsymbol{P}^{-1}$ の成分を決めていきます。まず、“c_3”に注目すると、

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & \\ -1 & \end{pmatrix}$ とするのが良さそうです。どちらかの成分に -1 をかけますが、“c_1” が正となるようにします。次に、もうひとつの非対角成分“c_2”に着目して

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & \\ -1 & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするのが良さそうです。ここでもやはりどちらかの成分に -1 をかけますが、“c_4”が正となるように決めます。

実際に $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけてみて、確認をするとともに、係数を決めます：

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

これより、$c_1 = c_4 = 3$、となっていることが分かります。この 3 という数値は、実は、行列 $\boldsymbol{P}$ の行列式 $|\boldsymbol{P}|$ の値です。実際に確認してみましょう。（これで、2×2 の行列の逆行列の公式なぜあのような形になっているのか、理解できたのではないかと思います。）

つまり、$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{P}^{-1}$ の最終的な答えとなります。

最後に、

$$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$$

を計算してみましょう。

ここで、$\boldsymbol{P}^{-1}$ と $\boldsymbol{P}$ の位置・順番に注意しましょう。これはつまり、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルと固有値が（両辺ともに左から $\boldsymbol{P}$ をかけて）、$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ という意味を持っているということに対応しています。

左からひとつひとつ順番にかけていきます。まず $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$ を上記のやり方で計算します。次にさらに $\boldsymbol{P}$ をかけます。

$$\begin{array}{ccc} & (\boldsymbol{A}) & (\boldsymbol{P}) \\ (\boldsymbol{P}^{-1}) & (■) & (■) \end{array}$$

具体的には、（まず緑色の部分を埋めて、次に水色の部分を埋める、という順番です）

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20/3 & -8/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ということで、

$$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となること、つまり、行列 $\boldsymbol{A}$ の“対角化”ができたとともに、対角成分が 2 つの固有値となることが確認できました。

回答には（途中経過も示しつつ）、$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と書きます。

問２【積分】

（a）部分積分を用います。

解答例は：

$\frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$ （C は積分定数）

です。以下に解説を書いていきます。

まず、念のため、部分積分を復習しておきます。
（「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」とは、使用する記号が異なりますが、言っていることは同じです。）
部分積分とは、積分の中の関数がふたつの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積になっている時、

$$\int f(x)\,g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)\,G(x)dx$$

となることを利用して解く方法のことですね。ここで　$'$ はxで微分する、の意味で、$G(x)$ は $g(x)$ の積分、$G'(x) = g(x)$、もしくは、$G(x) = \int g(x)dx$ である関数です。
（部分積分は「げん・せき・ひく・び・せき」などと言って覚えるでしょうか。）
なお、この公式を忘れてしまったら、$\left(f(x)G(x)\right)'$を以下のように分解してみるとよいでしょう：

$$\left(f(x)G(x)\right)' = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

（右辺第一項を左辺に移した上で、この両辺を x で積分します。）
なお、上記は不定積分の場合ですが、定積分の場合も同様で

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)dx$$

となります。

実際の問題で、積分の中の関数のどれを $f(x)$ としどれを $g(x)$ とするとうまく解けるか、についてはいくつかのパターンがあります。

- 1 回もしくは複数回微分すると定数になるものを $f(x)$ とする
- $\log x$ を$f(x)$ とする（ $(\log x)' = 1/x$ であることがうまく活用できる場合）
- 三角関数が入っていて、部分積分を 2 回おこなうと、もとの関数が現れる場合

問題集等を参照し、ひととおりのパターンについて、実際に解いてみておいてください。

今回の問題 $\int x^n \log x\, dx$ の場合は、$\log x$ を $f(x)$ とします。書く順番を変えて、

$$\int \log x \;\; x^n \;\; dx$$

$$= \log x \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \int \frac{1}{x} \frac{1}{n+1}x^{n+1}\, dx$$

$$= \log x \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \int \frac{1}{n+1}x^{n}\, dx$$

$$= \log x \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

これは不定積分なので、積分定数 C を忘れずに。

また、さらにもう少し整理して、

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

としてもよいでしょう。

（b）これは、三角関数をうまく用いて変数変換をすると良さそうです。

解答例は：

$\frac{\pi}{4}$

です。以下に解説を書いていきます。

$(\sin\theta)' = \cos\theta$　（sin のグラフを思い出すと、$\theta = 0$ で傾き正なので、$+\cos\theta$）

$(\cos\theta)' = -\sin\theta$（cos のグラフを思い出すと、$\theta = 0 + \varepsilon$ で傾き負なので、$-\sin\theta$）

これらは覚えていると思いますが、$(\tan\theta)'$ はどうなるでしょうか？

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\,(\cos\theta)^{-1}$ を微分してみると、$(\tan\theta)' = \cdots = 1 + (\tan\theta)^2$ となります。

（実際に確かめてみましょう。）

そこで、この問題では、$x = \tan\theta$ とおくと、積分の中身が簡単になりそうです。実際、dx と$d\theta$の関係は、微分してみると

$$dx = (\tan\theta)' d\theta = (1 + x^2) d\theta$$

ですので、x から θ に変数変換すると、

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int d\theta$$

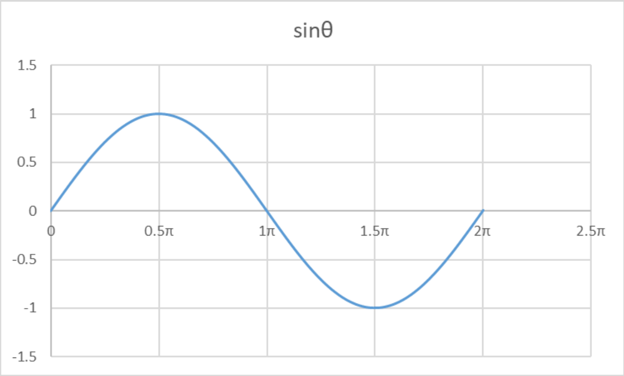
ととても簡単になります。
xが 0 から 1 の値をとる時、θは 0 から$\pi/4$ （45°）の値をとりますので、

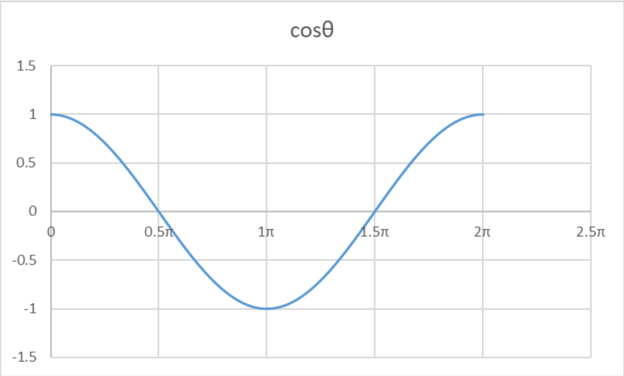
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} d\theta = [\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

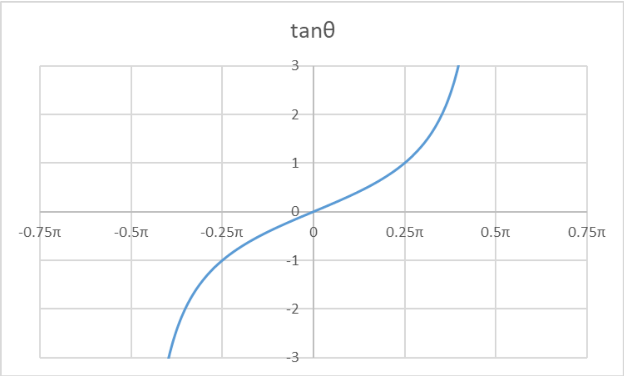
が答えとなります。

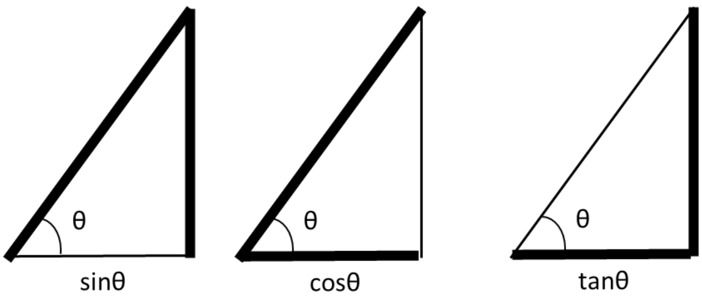
こういった変数変換は、ある程度経験を積んで、場数を踏んで、様々な関数に関する感覚を研ぎ澄ませていくと、ひらめく（ピンとくる）ようになってくるものです。(登場する関数は、n次の方程式か三角関数か指数関数か対数関数くらいしかないわけですし。) 問題集を一通り解いておきましょう。

なお、三角関数については、以下のようなグラフや図を（手で実際に）描いて確認する癖をつけておくとよいでしょう。







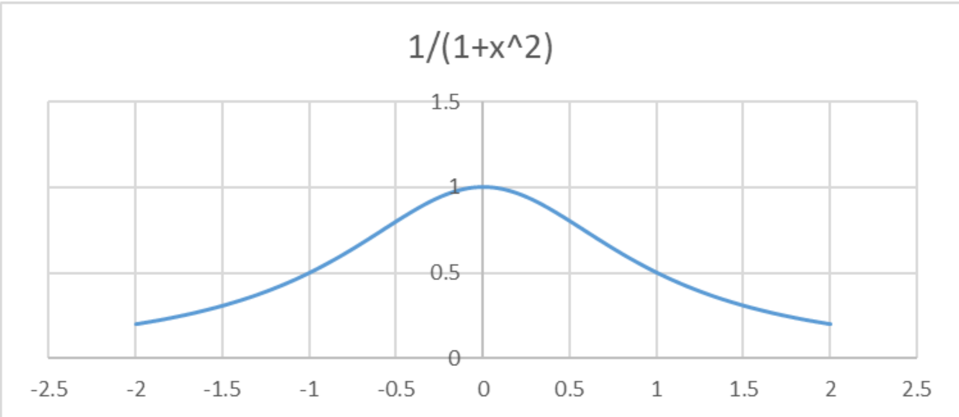


また、積分の中身の関数のグラフを描いてみて、「面積」について考察してみると見通しが得られる場合もあるかもしれません。（すくなくとも確かめ算の一助となるでしょう。）以下が、

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

のグラフです。これを、$x = 0 \sim 1$ まで積分するわけなので、1 よりも小さい値、おおよそ 3/4 くらいになるだろう、ということはすぐに分かりますね？（だからといって、$\pi/4$ になるのかどうかは、やはりちゃんと計算しないと分かりませんが。）

なお、このグラフは、エクセルでちゃんと計算して描いていますが、$x = 0$ と $x = 1$ において、y がいくらになるか、さらに、傾き（ $\frac{dy}{dx} = \ldots = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ）がいくらになるか、求めれば、おおまかなグラフは手で描けますね。



問３【ベクトル】

（a）ナブラ演算子（ ∇ 、デル演算子ともいう）をよく理解しておきましょう。

解答例は：

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r}$$

です。以下に解説を書いていきます。

まずは、「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の「2 ベクトル」を読んでください。そこには「ベクトル演算をする場合には、デカルト座標系（直交直線座標系、直角座標系、$x-y-z$ 座標系）での成分表記を用いるのが簡便である。」と書かれています。煩雑にはなるかもしれませんが、成分表記して、ひとつひとつ間違えないように注意して我慢強く計算を進めていけば、確実に答えにたどりつきます。

デカルト座標系において、x 軸、y 軸、z 軸、それぞれの方向の単位ベクトル（基本ベクトルという）を $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ とすると、ナブラ演算子は

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

と書けます。また、次のように表記することもできます：

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

および、

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

さらに、このナブラ演算子を用いて、スカラー関数 f の傾き/勾配（gradient, grad）、ベクトル関数 A の発散（divergence, div）と回転（rotation, rot, curl）は、

$$\nabla f = \mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

（特に最後の回転については、一度手で書いてみましょう。x,y,z、y,z,x、z,x,y と規則性が理解できるでしょう。）

次に、∇^2（あるいは、Δ もしくは $\nabla \cdot \nabla$ と表記）は、ラプラシアン（ラプラス作用素、Laplace operator）と呼ばれ、関数（ユークリッド空間上の函数）の「勾配（grad）の発散（div）をとる」ものです。（つまり $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f)$ です。）
ラプラシアンは、大気や海洋の現象を含むさまざまな物理現象を記述する微分方程式に現れます。
デカルト座標系においては、

$$\nabla^2 f = \Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

です。

問題では、3 次元空間における原点からの距離 r にラプラシアンをかけます。r をデカルト座標系で表記すると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

です。まず x による 2 階偏微分の部分を計算してみると、

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + x\frac{-1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

ですので、y と z の分と足し合わせると、

$$\nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

となります。

なお、この問題の場合は、ラプラシアンの極座標系（r, θ, φ）の表示

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

を使うと、簡単に求まります。右辺第 2 項と第 3 項はゼロですので、第 1 項のみ計算すればよいわけです。同じ答えが出ることを確認してみましょう。

ついでに、以下に、極座標系における傾き/勾配（gradient, grad）、発散（divergence, div）、回転（rotation, rot, curl）を記しておきます。（地球大気・海洋は極座標系（球座標系）で考えていきますので、極座標系もある程度“見慣れて”おくとよいでしょう。ただし、地球の問題の場合は、座標系のとり方が一般的な極座標系のとり方とは少し異なります。緯度を赤道で0度、北極で+90度、南極で−90度としますし、経度、緯度、高度、の順で並べますし、使う記号も異なります。大気力学特論や海洋力学特論で勉強することになるでしょう。）

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta$$

以下、ベクトルの場合、ここでは上からr成分、θ成分、φ成分として、

$$\nabla f = \mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\dfrac{\partial\left(r\sin\theta\, A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial\varphi}\right\} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left\{\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial\left(r\sin\theta\, A_\varphi\right)}{\partial r}\right\} \\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\} \end{pmatrix}$$

(b) $\nabla\times(\boldsymbol{k}\times\nabla r^2)$ **は順番に解いていきます。**

解答例は：

$\nabla\times(\boldsymbol{k}\times\nabla r^2)=4\boldsymbol{k}$

です。以下に解説を書いていきます。

まずは念のため、ベクトル積（外積）（記号×）を復習しておきます。以下のように表記するとより覚えやすいかもしれません。どういう関係性になっているか読み取れますか？行列式のようですね？（x 成分は y と z で、y 成分は z と x で（この順番が大事)、z 成分は x と y で、という順になっていますね？）

$$\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\A_zB_x-A_xB_z\\A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

まず、∇r^2 を解きましょう。

$$\nabla r^2=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$$

次に、$\boldsymbol{k}\times\nabla r^2$ を解きましょう。

$$\boldsymbol{k}\times\nabla r^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y\\2x\\0\end{pmatrix}$$

最後に、

$$\nabla\times(\boldsymbol{k}\times\nabla r^2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2y\\2x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$$

これで答えが出ました。これを $4\boldsymbol{k}$ と書くとなおよいでしょう。

問４【微分方程式】

「知っていて欲しいこと、分かっていて欲しいこと」の「数学編」の一番最後に大変に重要なことが書かれています：

「微分方程式を解いたときには、得た解を元の式に代入して、それを満足するかどうかチェックすることをお勧めする。」

確かめ算やクロスチェックは、テストや試験だけでなく、研究活動においてもいつも非常に重要です。

（a）これは変数分離ができるパターンですね。

解答例は：

$y = \log_e\left(-\frac{1}{e^x+C}\right)$ （C は積分定数）

です。以下に解説を書いていきます。

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x\, e^y$$

$$e^{-y}\, dy = e^x\, dx$$

両辺を積分して

$$\int e^{-y}\, dy = \int e^x\, dx$$

$$-e^{-y} = e^x + C$$

ここで、C は積分定数。これを答えとしても間違いとは言い切れませんが、さらにここから、$y = ...$ の形に持っていきましょう。まずは $e^y = ...$ の形にして、

$$e^y = -\frac{1}{e^x + C}$$

$\log_e e^y = y$ なので

$$y = \log_e\left(-\frac{1}{e^x + C}\right)$$

（なお、本コースの問題では $\log_e x$ を $\ln x$ ではなく $\log x$ と表記しています。）

もちろん、確かめ算もしてみましょう。$\frac{dy}{dx} = \cdots = e^x\, e^y$ となりますか？

（b）これは、まず同次方程式の解を求めた上で、定数変化法を使って（その場合、途中で部分積分を 2 回おこなう、というステップも登場します）、もしくは特解を求めて、一般解を求めます。さらに初期値問題の形になっているので、最終的に定数を決めます。

解答例は：

$$y = -\frac{2}{5}e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$$

です。以下に解説を書いていきます。

問題の方程式に対する同次方程式は、$\sin(2x)$ の項をゼロとした

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

です。これの解は

$$y = C\,e^{-x}$$

ですね。ここでは C は定数です。

定数変化法を用いて非同次方程式を解く場合は、これを x の関数として

$$y = C(x)\,e^{-x}$$

として、問題の方程式に代入して $C(x)$ を求めます。実際に代入すると $\frac{dC}{dx}$ の項が残って

$$\frac{dC}{dx}e^{-x} + \sin(2x) = 0$$

したがって、

$$\frac{dC}{dx} = -e^{x}\sin(2x)$$

$$C = -\int e^{x}\sin(2x)\,dx + C_1$$

したがって、答えは

$$y = e^{-x}\left(-\int e^{x}\sin(2x)\,dx + C_1\right)$$

... としてしまいたいところですが、これでは微分方程式の問題が不定積分の問題に変わっただけで、解いたことにはなりません。ここに出てくる不定積分は、三角関数が含まれていますから、部分積分を 2 回おこなうともとに戻る、というパターンですので、解くことができます（積分を外すことができます）。そこで

$$I = \int e^{x}\sin(2x)\,dx$$

と置いて、これを 2 回、部分積分してみましょう。さて、e^x と $\sin(2x)$ のふたつの関数、どちらを**問 2（a）**の$f(x)$ に、どちらを $g(x)$ にしたらよいでしょうか。。。
実は、どちらでも構わない、どちらでもうまくいく、が正解です。練習のため、それぞれの場合で計算してみましょう。
途中経過は省略しますが、結果は

$$I = \frac{1}{5}\, e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x)$$

となります。したがって、

$$y = C_1 e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$$

が一般解です。

いっぽう、定数変化法を用いるのではなくて、特解を求めてから一般解を求める方法を採る場合は、非同次の項である $\sin(2x)$ に着目して

$$y = A\,\sin(2x) + B\,\cos(2x)$$

という形の特解を考えます。これを問題の式に代入して、

$$(A - 2B + 1)\,\sin(2x) + (2A + B)\,\cos(2x) = 0$$

これがすべてのxで成り立つので、$A - 2B + 1 = 0$、$2A + B = 0$。これより A と B を決めます。一般解は、同時方程式の一般解と特解を足し合わせたものとなります。

さて、ここで、先を急がずに、必ず確かめ算をしておきましょう。まず $\frac{dy}{dx}$ を計算し、その上で y と足し合わせて、$\frac{dy}{dx} + y = \cdots = -\sin(2x)$ となりますか？

最後に、$y(0) = 0$ の条件から、C_1 を決めます。

$$C_1 = -\frac{2}{5}$$

となります。したがって、最終的な答えは、

$$y = -\frac{2}{5} e^{-x} - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$$

です。