

2018年度入学試験(2017年8月実施) 問題2

1. (a) z を鉛直上向きの座標とすると方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$$

となる。初速度を v_0 、 $t = 0$ での高さを $z = 0$ とし、方程式を積分すれば、

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

なので、 $0 = (v_0 - \frac{1}{2}gT)T$ となり、答えは、 $v_0 = \frac{1}{2}gT$ 。

- (b) 水平から測った発射角度を θ とすると、初速度の鉛直成分は $v_0 \sin \theta$ なので飛行時間は $T' = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$ 。水平距離は、速度の水平成分 $v_0 \cos \theta$ に飛行時間をかければよいので、
 $L = T' v_0 \cos \theta = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{gT'^2}{2} \sin \theta \cos \theta$ 。 $\sin \theta \cos \theta$ の最大値は、 $\theta = \pi/4$ のときで $\frac{1}{2}$ なので、最大到達距離は、 $gT'^2/4$ 。

2. 力学的エネルギーの保存と運動量の保存を考える問題である。質点の速度を (v_x, v_z) 、ここで、 v_x が水平、 v_z が鉛直成分、台の速度を $(V, 0)$ 、質点の高さを h とする。力学的エネルギーの保存は

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}mV^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

水平方向の運動量の保存は

$$mv_x + mV = mv_0$$

である。これらを知っていれば解ける。

- (a) 台固定なのでエネルギー保存のみを考える(運動量保存は質点と地球の間で成り立つ)。エネルギーの保存式で、 $v_x = v_z = V = 0$ とすると $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max}$ なので、 $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$
- (b) 最高点では $v_x = V$ なので、水平方向の運動量の保存は $mv_x + mV = 2mV = mv_0$ となり、それ故、 $v_x = V = \frac{1}{2}v_0$ 。最高点にでは $v_z = 0$ より、力学的エネルギーの保存は、
 $\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}V^2 + gh_{max} = \frac{1}{2}v_0^2$ で、かつ、 $v_x = V = \frac{1}{2}v_0$ なので、 $h_{max} = \frac{v_0^2}{4g}$
- (c) 水平方向の運動量の保存より、 $v_x + V = v_0$ 。力学的エネルギーの保存より、 $v_x^2 + V^2 = v_0^2$ 。これらより、 $v_x V = 0$ 、 $v_x = v_0 - V$ が得られるので、台か質点の何れかが静止し、何れかが v_0 で移動することが分かる。何方が静止するかは過程を考えれば明らかである。静止している台の斜面を質点が登ることにより質点は台を右に押し、台が右に動き出し、質点が下る際にも質点は台を右に押すことになるので、 v_0 で移動するのは台 ($V = v_0$) で、静止するのは質点 ($v_x = 0$) となる。この系はエネルギーが保存するので、結果的には完全弾性衝突と同じということである。

3. 必要な熱量は、氷と水、それぞれの比熱と上昇温度をかけ、融解熱を足せばよいので、

$$\begin{aligned} &1[\text{kg}] \times 20[\text{K}] \times 2 \times 10^3[\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}] + 1[\text{kg}] \times 20[\text{K}] \times 4 \times 10^3[\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}] + 1[\text{kg}] \times 3.2 \times 10^5[\text{Jkg}^{-1}] \\ &= 4.4 \times 10^5[\text{J}] \end{aligned}$$

図を描くときには、一定比熱で一定加熱なので、横軸に時間をとった時、氷、水、それぞれの温度上昇は傾き一定になること、また、氷の比熱が水の比熱の半分なので、氷のほうが傾きが倍になること、また、融解に要する時間等を正しく考えることが必要である。 -20°C から 0°C まで温度が上がるのに要した時間を t_0 とすると、 0°C の時間(氷と水が共存している時間)は $8t_0$ 、 0°C の水が 20°C まで消音するのに要する時間は $2t_0$ となる。この辺りを注意して図を描く(図中にメモリを入れるか、説明文を加えるのが良い)。

