

令和 9 年度秋季入試 北海道大学大学院環境科学院

地球圏科学専攻大気海洋物理学・気候力学コース

解答例

出題意図

必答問題

「数学」および「物理学」に関する基礎的な知識と理解力を問う。

選択問題

「数学」、「物理学」、「地球物理学(気象学)」、「地球物理学(海洋物理学)」、合計 4 問のうちから 1 問を選択し、これらの分野に関する知識と理解力を問う。

令和 8 年 8 月

問題 1 : 必答問題 解答例

$$\text{問 1 (a)} \quad \nabla \phi = \begin{pmatrix} a \cos(ax) e^{-by} \sqrt{cz} \\ -b \sin(ax) e^{-by} \sqrt{cz} \\ \frac{1}{2} \sin(ax) e^{-by} \sqrt{\frac{c}{z}} \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = x$$

$$\text{(c)} \quad \nabla \times \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z - 3x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{問 2} \quad \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\text{問 3} \quad \text{一般解は, } y = e^{3x} + ce^{-2x}. \text{ 条件を満たす解は, } y = e^{3x} - e^{-2x}$$

問 4 (a) ふたつの固有値とそれぞれに属する固有ベクトルは

$$\lambda = 1, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 6, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ の時 P の例として

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2 \\ 2 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2 \\ 2 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

問題2：必答問題

問1 (a) $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \cos \omega t - kx$

(b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(c) $A = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$

(d) $\omega \rightarrow \omega_0$ で振幅 $A \rightarrow \infty$, 共振が起こる

(e) 仕事率 $= -\frac{1}{2} F_0 A \omega \sin 2\omega t$

これを1周期分で積分→仕事 $W = 0$

問2 (a) 境界温度 $T_i = \frac{R_2 T_H + R_1 T_C}{R_1 + R_2}$

ただし $R_1 = \frac{L_1}{k_1 A}$, $R_2 = \frac{L_2}{k_2 A}$

(b) 熱流量 $\frac{dQ}{dt} = \frac{T_H - T_C}{R_1 + R_2}$

(c) 系全体のエントロピー生成率 $= \frac{dQ}{dt} \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_H} \right)$

今, $T_H > T_C$ なので, 系全体のエントロピー生成率は正となる.

これは熱伝導によってエントロピーが生成されることを示しており, 熱伝導が不可逆過程であることを意味する.

(d) (b)より、熱流量は変化しない.

(c)より、系全体のエントロピー生成率は変化しない.

入れ替え後の境界温度 T'_i と, もとの配置の T_i との差は, $T'_i - T_i = \frac{(R_1 - R_2)(T_H - T_C)}{R_1 + R_2}$

したがって, 各材料の熱抵抗の大小で境界温度の差が生じる.

問題3：選択問題・数学

問1 $u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$

問2 $M_1: u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, 中心 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円.

$M_2: \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, 中心 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円.

問3 L_1 と L_2 の交点 $z_0(t_0)$ において, $t_0 + i = 1 + it_0$ より $t_0 = 1, z_0 = 1 + i$

$\frac{dz_1}{dt} = 1, \frac{dz_2}{dt} = i$ より z_0 における L_1, L_2 の方向ベクトルは $(1,0), (0,1)$

よって $\theta = \frac{\pi}{2}$.

M_1 と M_2 の交点 w_0 は, $w_0 = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ ($t_0 = 1$)

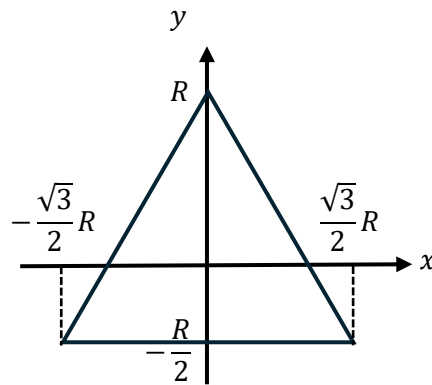
$w_1 = \frac{t-i}{t^2+1}, w_2 = \frac{1-it}{t^2+1}$ より $\frac{dw_1}{dt} = \frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2} + i \frac{2t}{(t^2+1)^2}, \frac{dw_2}{dt} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2} + i \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$

$w_0(t_0)$ における接線の方方向ベクトルは, $t_0 = 1$ として $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

よって $\varphi = \frac{\pi}{2}$ となり, $\theta = \varphi$ が成り立つ.

問題4：選択問題・物理学

- 問1 原点のまわりの角運動量. 中心からの距離を r , 位置ベクトルに直交する速度成分を v とおくと, $mr v$
- 問2 $2V$
- 問3 $\frac{3}{2}mV^2$
- 問4 直前: $(2V, 0)$. 直後: $(-V, \sqrt{3}V)$
- 問5



- 問6 空気抵抗の大きさを kv^2 とすると (k は正の定数, v は重りの速さ), $v = (V^{-1} + kt)^{-1}$

問題5：選択問題・地球物理学

問1

(a)

式(2)を x で微分

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + f \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$$

式(1)を y で微分

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{df}{dy} v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}$$

両者を引くと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta v = 0$$

ここで水平非発散条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0$$

(b)

(i) $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ を $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ に代入すると $\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} (= \nabla^2 \psi)$

(ii) 式(3) $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0$ に $\zeta = \nabla^2 \psi, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

(iii) $\psi = A \cos(kx - \omega t)$ を代入すると, $k\omega + \beta = 0$ 。 $\omega = -\frac{\beta}{k}$ でも可。

(c) 位相速度 $\frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2} < 0$ より西向きに伝播する。ロスビー波。

問2 以下のような点について、300字程度でまとめていること。

(a) 気圧傾度力、コリオリ力および摩擦力の関係を説明し、摩擦の影響により風が低圧側へ吹き込むこと、さらに質量保存則により低気圧中心付近で上昇流が形成されることについて述べられていること。

(b) 数値モデルを用いて大気の運動方程式や熱力学方程式などを数值的に解くことが共通していること、天気予報は初期値問題であること、地球温暖化予測は大気・海洋・陸面などを結合した気候モデルを用い、温室効果ガス濃度などの外部条件を与える境界値問題であることについて述べられていること。

(c) 太陽から受ける短波放射と大気・地表面から宇宙空間へ放出される長波放射の大小の関係が緯度によって異なること、低緯度から高緯度への熱輸送、およびその熱輸送を担うハドレー循環や中緯度の温帯低気圧・高気圧（傾圧不安定波）について述べられていること。

問題6：選択問題・地球物理学

問1

CTDなどで観測された水温・塩分をTSダイアグラム上に示すことで、水塊分類、起源の推定、水塊変質や混合過程の理解に用いられる。等密度線を示すことで、水塊間の密度関係や安定性を直感的・視覚的に把握できる利点がある。

問2

図の等密度線間の間隔から、 α はAよりBで小さく、 β はAとBで同程度の大きさであることが推察される。よって、 α/β はAよりもBで小さい。したがって、BではAと比較して、密度に対する水温変化の寄与が相対的に小さく、塩分変化の寄与が相対的に大きい。

問3

図において、水塊BとCを結ぶ直線の中点が混合水に対応し、混合水の密度は元の水塊の密度よりも大きくなる。低温低塩の沿岸水と高温高塩の沖合水が接して分布する冬季の熱塩フロントの亜表層において、混合水の沈み込みが観測されることがある。

問4

熱の分子拡散係数が塩分のそれより大きいため、DからBへ熱が先に拡散する。その結果、境界面付近では、D側は熱を失って重くなり、B側は熱を受け取って軽くなる。一方、塩分の拡散は遅いため、密度を安定化させる塩分変化はすぐには追いつかない。そのため、境界面付近では、密度成層が弱まり、場合によっては不安定化して鉛直対流が生じることがある。

問5

現場圧力が増加すると海水の結氷点は低下する。フラジルアイスと呼ばれる微細な氷結晶が形成される沿岸ポリニアなどの海域では、結氷点以下の過冷却水が観測されることがある。