

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和 9 年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

問題 1 と 2 は必答問題、問題 3 ～ 6 は選択問題である。必答問題 2 問は必ず解答すること。選択問題は、数学 1 問・物理学 1 問・地球物理学 2 問、計 4 問出題されている。その中から 1 問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和 8 年 8 月

問題 1 : 必答問題

問 1 3次元直交直線座標系 (x, y, z) における関数 $\phi = \sin(ax) e^{-by} \sqrt{cz}$ と, ベクトル $\mathbf{a} = (z^2, xy, x^3)$ について以下を求めよ.

- (a) $\nabla \phi$
- (b) $\nabla \cdot \mathbf{a}$
- (c) $\nabla \times \mathbf{a}$

問 2 以下を求めよ. ただし, e は自然対数の底である.

$$\int_1^e x \log x \, dx$$

問 3 以下の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}, \quad y(0) = 0$$

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

- (a) A の固有値 λ_1, λ_2 およびそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.
- (b) $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ を満たす正則行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.

問題2：必答問題

問1 図1に示すように、質量 m の台車が、壁に固定されたばね定数 k のばねにつながれている。この系の固有角振動数を ω_0 とする。台車には外力 $F = F_0 \cos \omega t$ が加えられ、水平面上を摩擦なく運動する。ここで、 ω は定数であり $\omega \neq \omega_0$ である。 t は時刻を表し、台車のつりあいの位置からの水平方向の変位を $x(t)$ とする。

(a) 台車の運動方程式を立てよ。

(b) ω_0 を求めよ。

(c) (a)の運動方程式の解として、次の式の形で表されるものがある。

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (1)$$

この場合について振幅 A を求めよ。ただし、 A は定数とする。

(d) (1)について、外力の角振動数 ω が固有振動数 ω_0 に近づくと、台車の運動がどのようなになるか説明せよ。

(e) (1)について、外力が台車にする仕事率を求めよ。さらに1周期の間に外力が台車にする仕事を求めよ。

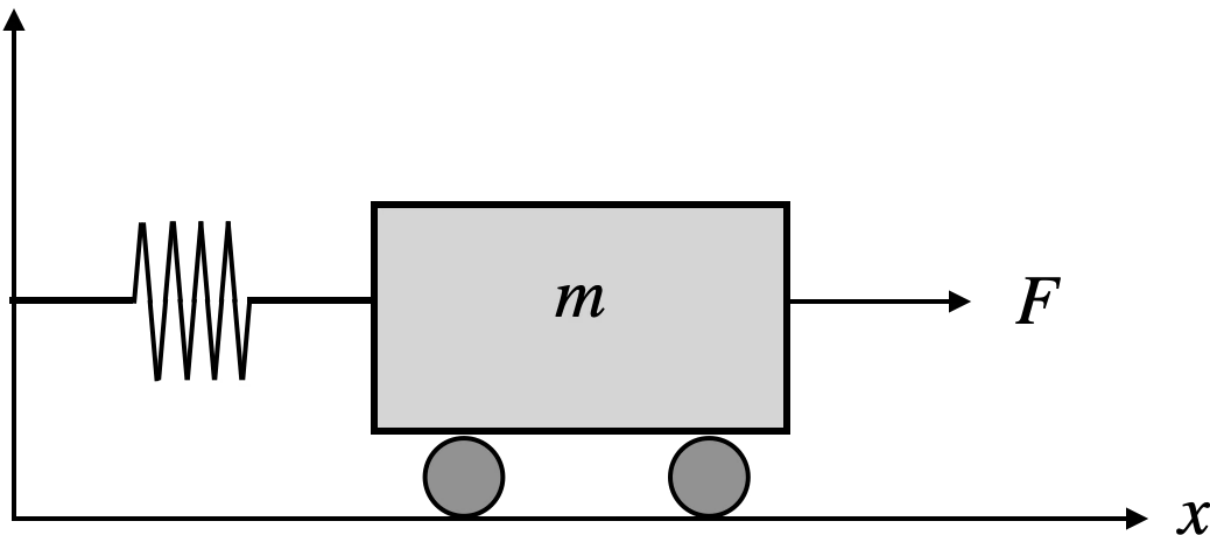


図1：模式図

問2 図2に示すように、熱伝導率 $[W m^{-1} K^{-1}]$ がそれぞれ k_1, k_2 , 厚さがそれぞれ L_1, L_2 の材料1と材料2からなる壁がある。壁は、気体で満たされた高温側と低温側の空間を隔て、それぞれの空間と壁が接する面積は A である。高温側と低温側の気体の温度はそれぞれ T_H, T_C である。壁を通じた熱流量が一様となる程度に時間が経過しているが、 $T_H > T_C$ である場合について、以下の問に答えよ。ただし、熱流は高温側と低温側を隔てる壁を通してのみ生じるものとする。

- (a) 壁の2つの材料の境界温度を求めよ。
- (b) 壁を通して単位時間あたりに流れる熱量（熱流量）を求めよ。
- (c) この壁の系全体の熱伝導に伴う単位時間あたりのエントロピー生成率を求め、その物理的意味について簡潔に述べよ。
- (d) 材料1と材料2を入れ替え、高温側に材料2、低温側に材料1を置いた。このとき、熱流量、境界温度、およびエントロピー生成率はそれぞれどのように変化するか。

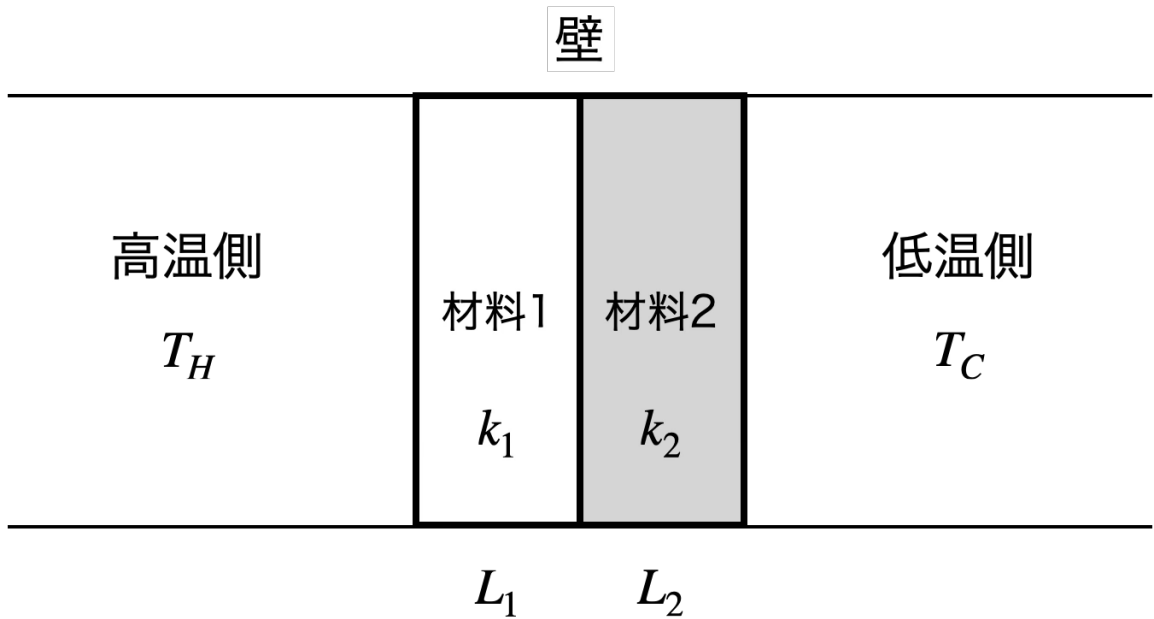


図2. 模式図

問題3：選択問題・数学

複素変数 $z = x + iy$ および $w = u + iv$ に対して,

$$w = 1/z$$

なる変換を考える．ここで， i は虚数単位， x, y, u, v は実変数とする．以下の間に答えよ．

問1 u と v を x と y で表せ．

問2 z 平面上の2つの直線 L_1, L_2 と，その w 平面上の写像 M_1, M_2 を考える． L_1, L_2 はそれぞれ，

$$L_1: z_1(t) = t + i, \quad L_2: z_2(t) = 1 + it, \quad (t \text{ は実変数})$$

で表されたとする． w 平面上の写像 M_1, M_2 を表す式を求めよ．ただし， t を用いず， u, v のみで表せ．また， M_1, M_2 を図示せよ．

問3 $z_1(t), z_2(t)$ の交点を z_0 とし，その写像を $w_0 = 1/z_0$ とする． z_0 における L_1, L_2 のなす角 θ と， w_0 における M_1, M_2 の接線のなす角 φ を求め， $\theta = \varphi$ となることを示せ．

問題 4 : 選択問題・物理学

図 1 のように，滑らかな細い管を通した糸の先に質量 m の重りをつけ，水平に設置した板の上で運動させる．糸は質量が無視でき，板の下で自由に引いたり，長さを固定したりできる．問 6 以外では，摩擦や空気抵抗は働かないものとする．水平面を上からみて，図 2 のように，管の中心に原点を取り x, y 軸を設定する．重りは初期に，半径 R ，速さ V で反時計回りに等速円運動しているとする．

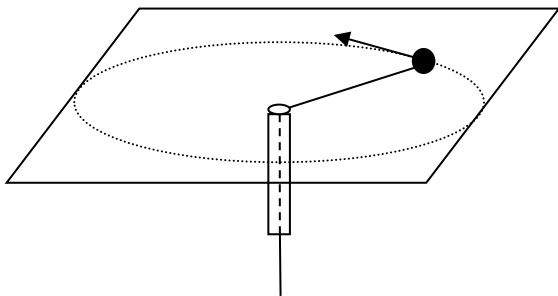


図 1

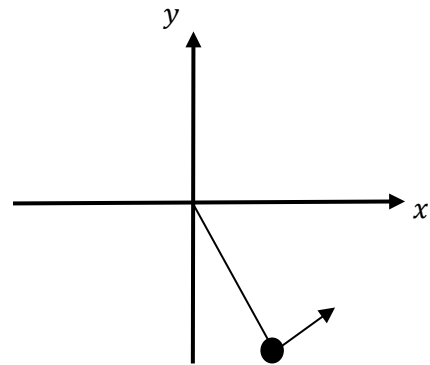


図 2

- 問 1 糸を引いても変化しないものは何か，物理学の用語を用いて述べ，記号を適切に定義して式で表せ．
- 問 2 糸をゆっくり引いて，重りと原点の距離を $R/2$ にした．その時の重りの速さを求めよ．
- 問 3 問 2 の過程で糸を引く際にした仕事を求めよ．
- 問 4 次いで，重りが $(x, y) = (0, -R/2)$ を通過する瞬間に糸を放し，重りと原点の距離が R になったところで固定した．固定する直前および直後の速度を， $(x$ 成分, y 成分) の形で表せ．なお，この過程で運動エネルギーは変化しない．
- 問 5 問 4 で固定した後の重りの軌跡を，再び重りが x, y 平面内で，原点まわりの角度が同じになるところまで図示せよ．
- 問 6 重りに対し，速さの 2 乗に比例する空気抵抗が働く場合について，重りの速さを時間 t の関数として求めよ．ただし， $t = 0$ において，問題冒頭の初期状態にあり，重りと原点の距離は保たれるとする．必要な記号は定義せよ．

問題5：選択問題・地球物理学

問1 大気の大規模な微小振幅運動を考える．基本場の風はなく，密度は ρ_0 で一定とする．東西方向および南北方向の速度成分をそれぞれ u , v ，気圧を p とする．また，東向きおよび北向きをそれぞれ x 軸および y 軸の正方向とする局所直交座標系を考える．このとき，運動方程式を線形化すると，水平運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

と表される．ただし， f はコリオリパラメータで， y のみの関数とし， $\beta = \frac{df}{dy}$ と定義する．運動は水平非発散であり， $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ が成り立つものとする．以下の問いに答えよ．

(a) 相対渦度を $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする．式(1)，(2)から，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0 \quad (3)$$

を導け．

(b) 流線関数 ψ を $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ と定義する．

(i) 相対渦度 ζ を流線関数 ψ を用いて表せ．

(ii) 式(3)を流線関数 ψ のみを用いた式に書き換えよ．

(iii) 流線関数が $\psi = A \cos(kx - \omega t)$ と表されたとする． k は波数， ω は角振動数である．ただし， A は定数， $k > 0$ とする．(ii)で求めた式を用いて，分散関係 (ω , k , β の関係式) を導け．

(c) 分散関係から位相速度を求め，伝播の向きを述べよ．またこの波を何というか，答えよ．

問2 以下の気象学に関する3問の中から1つを選び、300字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(a) 北半球においては、地表付近の低気圧では反時計回りに風が吹き込み、中心付近で上昇気流が形成される。その理由について気圧傾度力、コリオリ力、摩擦力、および質量保存則、という言葉を用いて説明せよ。

(b) 天気予報と地球温暖化予測は、ともに大型計算機を用いて行われる。両者の共通点と相違点について説明せよ。

(c) 太陽から受ける短波放射と、大気・地表面から宇宙空間へ放出される長波放射の大小は緯度によって異なる。低緯度と高緯度でその大小がどのように異なるか説明するとともに、その差を解消するように大気中で生じている運動について述べよ。

問題 6 : 選択問題・地球物理学

図 1 は、横軸に塩分 S ，縦軸に水温 T ($^{\circ}\text{C}$)，等密度線 σ_t (kg/m^3) を描いた TS ダイアグラムである。●印は水塊 A, B, C, D を表し、灰色領域は大気圧下での海水の結氷点以下を示している。以下の各問について、それぞれ 100~200 文字程度で説明せよ。

問 1 海洋学における TS ダイアグラムの利用方法，目的，利点を説明せよ。

問 2 塩分が 33 である水塊 A と B を考える。大気圧下での海水の密度を $\rho(S, T) = \sigma_t + 1000$ (kg/m^3) とし、熱膨張係数と塩分収縮係数をそれぞれ

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S, \quad \beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_T$$

と定義する。水塊 A と B の間で α/β の大小関係を定性的に比較し、両水塊の密度に対する水温と塩分の相対的な寄与の違いを説明せよ。

問 3 同じ密度をもつ水塊 B と C が水平的に接して分布している場合を考える。水塊 B と C の境界付近で両水塊が同じ割合で混合する場合、混合水の密度がどうなるかを説明せよ。また、こうした現象が現実の海で観測される状況の例を一つ説明せよ。

問 4 水塊 B と D が鉛直二層構造をとる場合を考える。水塊 D が上層、水塊 B が下層にあり、初期条件として両水塊は密度成層して静止しているとする。その後、両水塊の境界面では分子拡散による熱・塩分輸送が進行する。海水では熱の分子拡散係数が塩分のそれよりも大きいことを踏まえ、時間の経過とともに、どのような現象が生じ得るかを説明せよ。

問 5 現実の海では、深度増加にともなう現場圧力の増加によって、海水の結氷点がどのように変化するかを説明せよ。また、現実の海において結氷点以下の海水が観測される状況の例を一つ説明せよ。

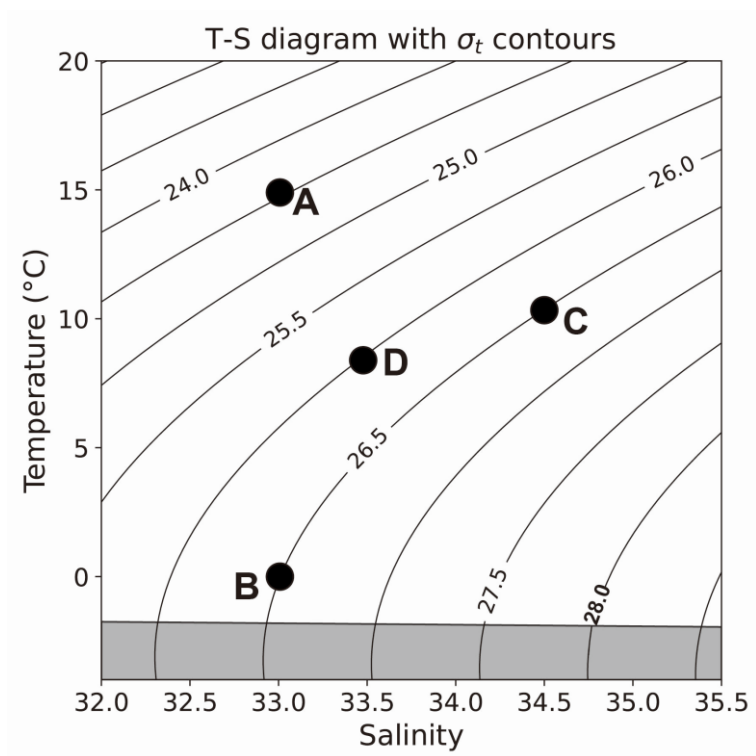


図1：TS ダイアグラム．灰色領域は大気圧下での海水の結氷点以下を表す．