北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

# 平成 23 年度大学院修士課程入学試験問題
# 専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 23 年 3 月

# 専門・問題 1

**問 1** 直交直線座標系 $(x, y, z)$ におけるベクトル $\boldsymbol{A} = (3x, 2y, x + z)$ とスカラー関数 $\phi = x^2 + 2y^2 + yz$ に関して以下を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

(b) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

(c) $\nabla \phi$

(d) $\boldsymbol{A} \cdot \nabla \phi$

(e) $\nabla \phi \times \boldsymbol{A}$

**問 2** $e^z = 3i$ を満たす複素数 $z = x + iy$ を求めよ。ただし、$x$、$y$ は実数、$i$ は虚数単位である。

**問 3** 以下の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

**問 4** 以下の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = 3, \quad x(0) = 0$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0, \quad x(0) = 0, \ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$

# 専門・問題2

ボール、矢、弾などの運動を、質量 $m$ の質点で近似して考える。水平面上に $x,\ y$ 座標をとり、鉛直上向きに $z$ 座標をとる。質点が放たれた位置を原点とし、放たれた時刻を $t=0$ とする。なお、質点に働く力は重力のみと近似し、重力加速度の大きさを $g$ とする。

**問1** 下の図のように、$y=D$ に $y$ 軸に垂直な壁があり、壁上の位置 $(0, D, 0)$ に的がある。原点から的に向かって質点を放つと、右に $d_x$、上に $d_z$ だけ外れた点に当たった。初速度をどれだけ修正すれば的に当たるかを下の手順にしたがって求めよ。ただし、的を外れたこのときの $t=0$ における $y$ 方向の速度 $V_y$ は分かっているとする。

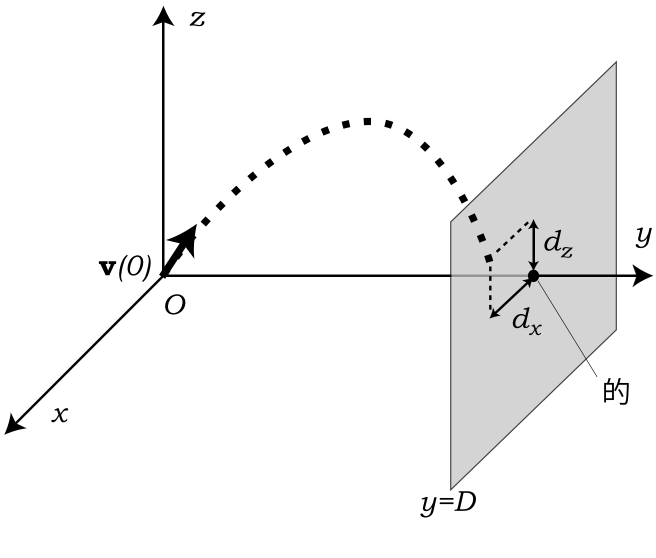
(a) 質点の運動方程式を $x,\ y,\ z$ 成分毎に書け。

(b) 質点が放たれてから壁に当たるまでの時間 $T$ を求めよ。

(c) 質点が放たれてから壁に当たるまでの任意の時刻 $t$ における、質点の速度 $\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t),\ v_y(t),\ v_z(t))$ と位置 $\boldsymbol{x}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ をそれぞれ各方向毎に求め、$d_x,\ d_z,\ D,\ V_y$ を用いて表せ。

(d) $t=0$ における $y$ 方向の速度 $v_y(0)\ (=V_y)$ は変更しないとき、$t=0$ における $x,\ z$ 方向の速度 $v_x(0),\ v_z(0)$ をどれだけ修正すれば的に当たるかそれぞれ求めよ。

(e) $v_z(0)$ を変更しないとき、$v_x(0),\ v_y(0)$ をどれだけ修正すれば的に当たるかそれぞれ求めよ。




**問2** 上の運動における質点の力学的エネルギーについて考える。以下では、質点が原点から放たれた瞬間における速度 $\boldsymbol{v}(0) = (v_x(0),\ v_y(0),\ v_z(0))$ は分かっているとして良い。

(a) 質点が原点から放たれた瞬間、および質点が最も高い位置に達したときにおける質点の運動エネルギーをそれぞれ求めよ。

(b) 質点が最も高い位置に達するまでに重力が質点にした仕事が、質点の運動エネルギーの変化に等しいことを運動方程式から示せ。

(c) 最も高い位置に達したときの質点の高さを求めよ。

# 専門・問題3

関数 $F(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad (x>0)$ について、以下の問いに答えよ。

**問1** この関数の以下の性質を示せ。

**(a)** $F(x+1) = xF(x)$

**(b)** $F(n+1) = n! \quad$ ($n$ は正の整数)

**(c)** $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad$ ($t = s^2$ とおく。$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい。)

**問2** 上記の性質を用いて以下を求めよ。

**(a)** $F\left(\frac{5}{2}\right)$

**(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

**問3** 以下の関係を導け。

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

ただし、

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

および変数変換 $t = n\tau$ を利用せよ。($n\to\infty$ で $t$ が $0$ から $\infty$ の値をとる時、$\tau$ は $0$ から $1$ の値をとる。)

# 専門・問題 4

**問 1** 断熱容器内において、温度 $T_0$ で固体状態にある質量 $m$ の物質 A を、温度 $T_1$ で液体状態にある質量 $M$ の物質 B に入れた。しばらく経つと、物質 A は完全に融けて液体となり、物質 A と B の温度は一様で $T_2$ ($T_2 < T_1$) となった。物質 A の融解温度を $T_m$ ($T_m < T_2$)、物質 A の固体および液体状態における比熱をそれぞれ $c_s$, $c_l$、物質 B の液体状態における比熱を $C$ とする。また、物質 B は温度 $T_m$ と $T_1$ の間で常に液体状態であり、混合による熱の発生・吸収は無視する。

(a) 物質 A の融解熱を $L$ とするとき、物質 A に移動した熱量 $Q$ を求めよ。

(b) 物質 A の融解熱 $L$ を求めよ。

**問 2** 気体の比熱は、体積一定の条件下で定められる定積比熱 $c_v$ と、圧力一定の条件下で定められる定圧比熱 $c_p$ とを区別しなければならない。両者に違いが生じる理由を説明し、理想気体に対してマイヤーの関係 $c_p - c_v = R$ の成り立つことを示せ。ただし、$R$ は気体定数である。

**問 3** 断熱壁で囲まれた容器内に理想気体を入れ、ピストンによりその体積を 1/2 に圧縮する。この過程が断熱的に起こるとき、気体の分子運動に伴う自乗平均速度 $\sqrt{v^2}$ は圧縮前の何倍になるか。比熱比 $\gamma$ を用いて表せ。ただし、理想気体はポアソンの関係 $TV^{\gamma-1} = \text{一定}$ を満たす。