北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和８年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。問題 1 と 2 は必答問題、問題 3 と 4 は選択問題である。必答問題 2 問は必ず解答すること。選択問題は、数学 1 問・物理学 1 問、計 2 問出題されている。その中から 1 問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和 8 年 2 月

問題1：必答問題

問1 3次元直交直線座標 (x, y, z) において、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + 3yz\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2z^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ （$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル）とするとき、以下を求めよ。

(a) $(\nabla \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

(b) $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}$

(c) $\nabla^2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

問2 以下の微分方程式を解け。

(a) $x^2 \dfrac{dy}{dx} - (y^2 + xy) = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 3x$

問3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問4 複素変数 z および w に対して、

$$z = w + \frac{4}{w}$$

なる変換を考える。このとき、w 平面上の原点を中心とする半径 2 の円は、z 平面上ではどのように表されるか。図示せよ。

問題2：必答問題

問1 図1のように、水平な xy 平面上の滑らかな床に、均質で長さ $2L$、質量 M の棒の中点Oを固定する。また、棒の両端に質量の無視できるばね（ばね定数を k とする）をそれぞれ付け、ばねのもう一端を y 軸と平行に設置された壁に図のようにそれぞれ固定する。点Oとそれぞれの壁との距離は、ばねの自然の長さと等しい。はじめ、棒を y 軸と平行に置き、その後、点O周りに棒をわずかに回転させ、静かに手を離したところ、棒は xy 平面上で点O周りに振動した。このとき、ばねは x 軸に沿って伸び縮みしたとする。次の問に答えよ。

(a) 棒と y 軸のなす角が θ のとき、点O周りに働く力のモーメントの大きさを求めよ。

(b) 点O周りの棒の慣性モーメントを求めよ。

(c) 点O周りの棒の運動方程式を書け。

(d) 棒の振動周期を求めよ。ただし、 θ は小さいとし、$\sin\theta \sim \theta$ と近似してよい。

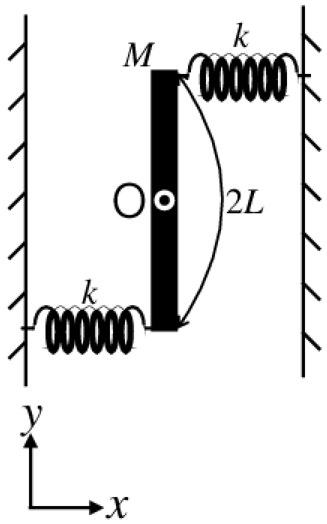

図1

問 2 容積 V（一定）の熱気球が大気圧下でいっぱいに膨らんでいる。気球内部の気体を除いた気球本体の質量は M である。気球内部の気体および外部の気体（大気）はいずれも同じ種類の理想気体であり、大気の絶対温度を T_0、大気の密度を ρ_0、大気圧を p_0、重力加速度の大きさを g とする。また、気球内部と外部の圧力は常に等しく、気球内部と外部の気体は自由に交換できる開放系であり、気球内部の気体の温度は空間的に一様であると仮定する。さらに、大気は静止しており、浮力は気球と同じ体積をもつ大気にかかる重力に等しく $\rho_0 gV$ である。また、$\rho_0 V - M > 0$ が成り立つとする。気球内部の気体をゆっくりと加熱し、大気圧下で気球が浮上を開始するための条件を求めたい。ただし、気球外部との熱伝導（気球膜を通る熱伝達）は無視できるとする。

以下の文章中の空欄 $\boxed{\quad A \quad}$ から空欄 $\boxed{\quad D \quad}$ まで、適切な式をそれぞれ書け。

気球内部の気体の絶対温度を T とすると、気球内部の気体の密度は $\boxed{\quad A \quad}$ と表される。よって、気球全体にはたらく重力の大きさは $\boxed{\quad B \quad}$ と表される。したがって、気球が浮上を開始する条件は、$T > \boxed{\quad C \quad}$ である。次に、気体の定積モル比熱を C_V とする。気球内部の気体を T_0 から T まで加熱した時の、気球内部に存在する気体の内部エネルギーの変化量は $\boxed{\quad D \quad}$ である。

問題3： 選択問題・数学

微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0) \tag{1}$$

および条件

$$f(0,t) = f(\pi,t) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2}$$

を満たす関数 $f(x,t)$ を考える。

問 1

$$f(x,0) = \sin kx$$

を満たす解を $f(x,t) = F(t)\sin kx$ と変数分離して求めよ。また、k についての条件を書きくだせ。

問 2 任意の $f(x,0)$ について、解 $f(x,t)$ をフーリエ級数の形で書きくだせ。

問 3

$$f(x,0) = \begin{cases} x\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) & \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi\right) \end{cases}$$

を満たす場合について

(a) $f(x,0)$ を図示せよ。

(b) $f(x,\pi)$ を求め、図示せよ。

問 4 $f(x,t)$ が満たす微分方程式が、(1) ではなく

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0) \tag{3}$$

である場合について、

$$f(x,0) = \sin x$$

を満たす解を、問 1 と同様にして求めよ。条件 (2) は同じとする。

問題4： 選択問題・物理

図2のように、質量 m の物体Aが、質量 M の中心天体Sの周りを、中心天体Sから近点Pまでの距離 r、遠点Qまでの距離 R（すなわち長軸の長さ $R+r$）とする楕円軌道上を運動している。あるとき、物体Aは、近点Pにおいて、その点での軌道接線方向の同一直線上を物体Aと反対向きに運動してきた質量 $\frac{1}{8}m$ の物体Bと正面衝突し、完全非弾性衝突によって一体となった。その後、一体となった物体は、中心天体Sを中心とする半径 r の円軌道上を等速円運動した。衝突前の物体Aの楕円運動と衝突後の円運動の向きは同じとする。万有引力定数を G とする。ただし、物体AとBの質量は中心天体Sの質量に比べて十分小さく、中心天体Sは静止しているものとする。なお、物体AとBは質点として扱う。以下の問に答えよ。

問1 衝突前において、物体Aが近点Pおよび遠点Qを通過するとき、それぞれの点における楕円軌道の接線方向の速さを V_P と V_Q とする。このとき、物体Aに関するケプラーの第2法則（面積速度一定の法則）および力学的エネルギー保存則を、それぞれ式で表せ。

問2 問1で得られた関係式を用いて、V_Q を消去し、近点Pにおける速さ V_P を G, M, r, R を用いて表せ。

問3 物体AとBが衝突して一体となった物体の等速円運動の速さを求めよ。

問4 近点Pにおける物体Aの軌道接線方向の運動を正とする軸を取る。近点Pにおける物体Bの速度の軌道接線方向成分を u として、衝突の瞬間における軌道接線方向の運動量保存の式を、問2および問3の結果を用いて書け。

問5 問題文の通り、$u < 0$ となる条件を、$\frac{R}{r}$ を用いて表せ。

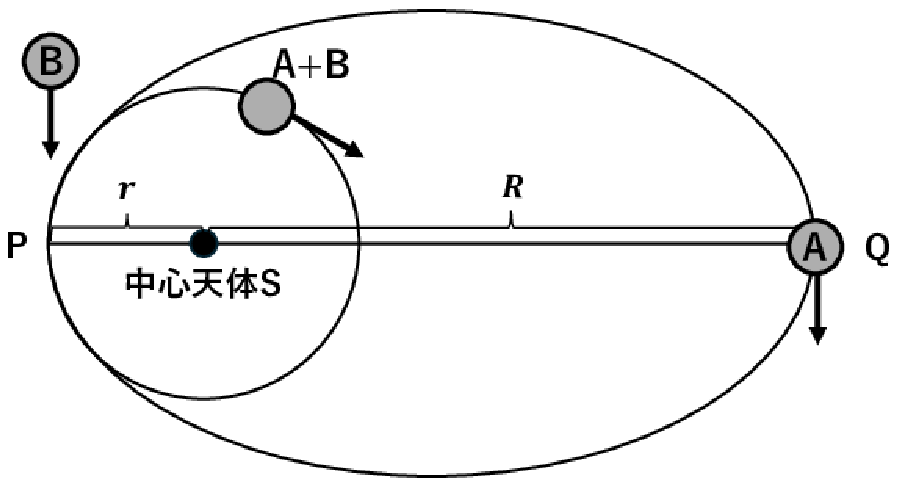

図2