

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和7年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和7年2月

専門・問題 1

問 1 以下の不定積分を求めよ。ただし、 a は正の実数である。

$$\int x e^{ax} dx$$

問 2 3 次元直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル $\boldsymbol{l} = (0, 1, 0)$ と $\boldsymbol{v} = (x^2 + y^2 + z^2, xyz, e^{x^2+y^2+z^2})$ について以下を求めよ。

(a) $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}$

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$

(c) $\nabla \times \boldsymbol{v}$

問 3 次の微分方程式の解を求め、解の概略を図示せよ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = -1$$

専門・問題 2

問 1 xy 平面内で働く力 \mathbf{F} が $\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \left(-px^2y, -\frac{x^3}{3}\right)$ と表される。 p は定数である。この力を受けながら、質点が原点 $(0, 0)$ から点 (a, b) まで、異なる経路を通して移動する状況を考える。次の問に答えよ。

- (a) 図 1 の黒矢印で示されるように、原点から、点 $(a, 0)$ を経て、点 (a, b) に至る経路 1 の場合、力 \mathbf{F} のした仕事 W_1 を求めよ。計算の手順を示すこと。
- (b) 図 1 の白矢印で示されるように、原点から点 (a, b) に一直線で至る経路 2 の場合、力 \mathbf{F} のした仕事 W_2 を求めよ。計算の手順を示すこと。
- (c) 力 \mathbf{F} が保存力となるための定数 p を求めよ。
- (d) 力 \mathbf{F} が保存力となる場合に、ポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ を求めよ。ただし、原点におけるポテンシャルエネルギーをゼロとする。

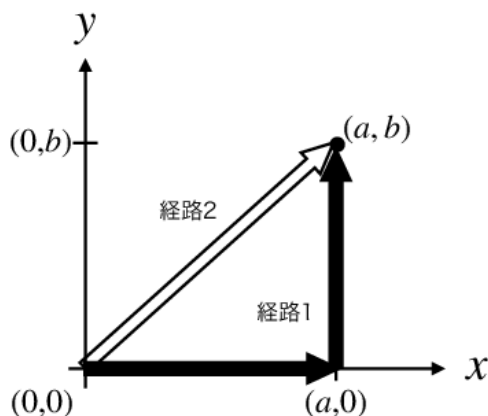


図 1

問 2 図 2 のように、1 モルの理想気体をシリンダーに入れ、ピストンで密閉したあと、以下の (a) と (b) の条件でピストンを押し下げる。理想気体の気体定数を R として、(a) と (b) の条件におけるエントロピーの変化をそれぞれ求めよ。

- (a) シリンダーの温度を T_1 に保ったままピストンをゆっくり押し下げた。ピストンの押し下げに必要な仕事は $W (> 0)$ であった。
- (b) シリンダーの温度を T_1 に保ったままピストンをゆっくり押し下げ、もとの体積の $\frac{1}{e}$ にした。 e は自然対数の底。

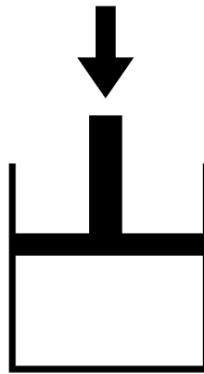


図 2

専門・問題 3

m 次の正方行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を、以下のように定義する。

$$\exp(A) \equiv I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

ただし、 m, n は正の整数、 I は m 次の単位行列である。以下の問に答えよ。

問 1 任意の m 次の正則行列を P とするとき、以下の 2 式が成り立つことを示せ。

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

問 2 任意の複素数 α, β に対して、 $\exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(\beta) \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ。

問 3 a を実数として、 $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ とする。この固有値を λ_1, λ_2 とし、その固有ベクトルの成分からなる行列を P とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

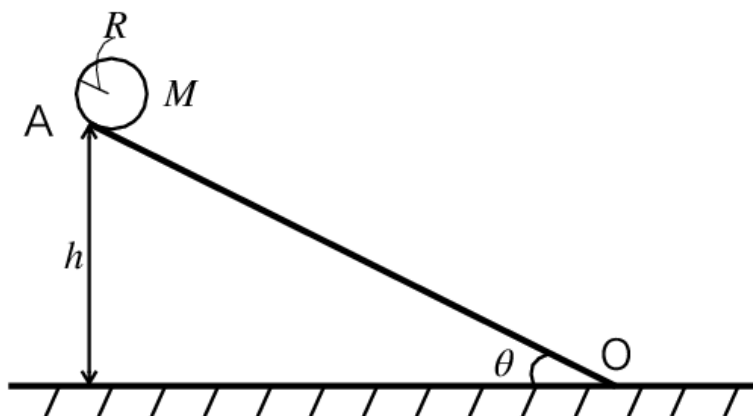
が成り立つ。固有値、 P 、 P^{-1} を求めよ。

問 4 問 3 の行列 A に対する $\exp(A)$ を求めよ。さらに、その各要素を三角関数で記せ。

専門・問題 4

下の図のように、点 O において傾斜角 θ の斜面が水平な床に固定されている。斜面頂上の点 A の高さは h である。この斜面を、質量 M 、半径 R の円柱が滑らずに中心軸を水平に保ったまま転がり降りる状況を考える。 R は h に比べて十分に小さい。このとき、以下の問に答えよ。重力加速度は鉛直下向きで、その大きさを g とする。また、円柱は均質な材料でできているものとする。

- 問 1 円柱が斜面に沿って下る加速度を a 、斜面と円柱の間の摩擦力を F とするとき、円柱の重心の並進運動に対する運動方程式を示せ。
- 問 2 円柱の重心まわりの角運動量に対する方程式を示せ。ここで、回転角加速度の大きさを α とする。また、円柱の慣性モーメントは $\frac{MR^2}{2}$ である。
- 問 3 地点 A で静止していた円柱が、転がり降りて点 O に到達したときの、重心の速さを求めよ。
- 問 4 傾斜角を徐々に大きくすると、円柱は斜面を滑りながら転がり降りるようになる。この斜面の静止摩擦係数 μ が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるとき、円柱が滑らずに転がり降りることができる斜面の最大傾斜角 θ_{\max} を求めよ。



図