北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和 6 年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和 6 年 2 月

専門・問題 1

問 1 3 次元直交直線座標系 (x, y, z) における位置ベクトルを $\mathbf{r}$、その原点からの距離を r、n を整数として、∇r^n を求めよ。

問 2 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5\sin x, \qquad y(0) = 0$$

問 3 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。ただし、$a > 0$ とする。

(a) 行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ。

(b) (a) で求めた固有値が重解でないとき、固有ベクトルが直交するための条件を求めよ。

専門・問題 2

問 1 支点 O から大きさを無視できる質量 m の小球 1 と小球 2 が長さ l の糸で吊るしてある。糸は鉛直のときに点 P で棒と接している。図 1 のように小球 1 のみを水平にして静かに手を放した。小球 1 は最下点で小球 2 に衝突し、その後、2 つの小球は一体となり、点 P を中心に半径 r の円弧上を運動した。このとき、以下の問に答えよ。ただし、小球は質点と考えてよい。また、運動はこの面内で起こるものとするが、小球は P の周りを自由に円運動できるものとする。摩擦や抵抗はない。重力は鉛直下向きで、その加速度の大きさを g とする。

(a) 小球 1 と小球 2 が衝突し合体した直後の小球の速さを求めよ。

(b) 糸がたるまずに、合体した小球が点 P の周りを円運動する場合の、糸の長さ l と半径 r の間の関係を示せ。

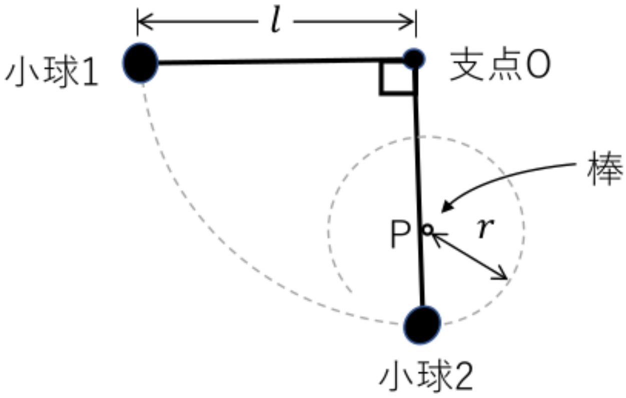

図 1:

問 2 図 2 のように大きさが無視できる質量 m_1 の小球 1 と質量 m_2 の小球 2 を、自然長 a のばねでつなぎ、水平な台の上にばねを引っ張って静止させたのち、手を離す。小球と台の間に摩擦はない。ばねに平行に x 軸をとり、小球 1 の位置を x_1、小球 2 の位置を x_2 $(x_1 > x_2)$ とするとき、以下の問に答えよ。ただし、ばねによる力は、ばね定数 k のフックの法則にしたがうものとする。

(a) 小球 1 に働く力を示せ。

(b) 小球 1 および小球 2 に対する運動方程式をそれぞれ書け。

(c) **(b)** を解いて、小球 1、小球 2、ばねからなる系の振動の周期を求めよ。

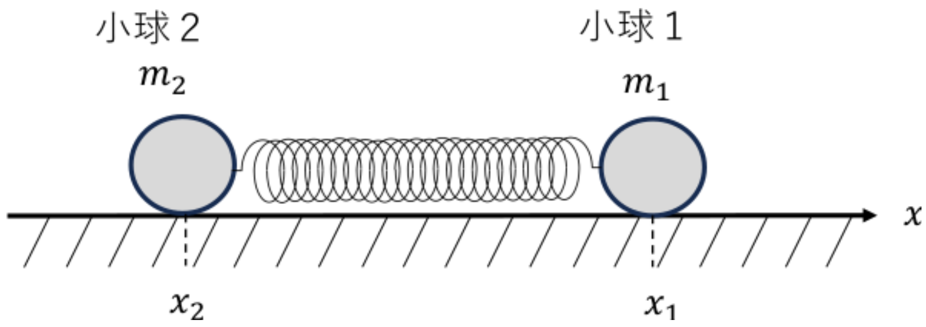

図 2:

専門・問題 3

x-y 平面上に図 1 のような閉曲線 C と、C に囲まれた領域 R があり、C と R を含む領域で定義された関数 $M(x, y)$ と $N(x, y)$ がある。ここで、M, N は微分可能な連続関数である。このとき、次の式 (1) が成り立つ。

$$\oint_C (M\,dx + N\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \tag{1}$$

式 (1) の左辺は反時計回りの周回積分を表す。

問 1 図 1 に示すとおり、閉曲線 C 上の点 A、点 B の x 座標をそれぞれ a, b とする。また、閉曲線 C 上の点 E、点 F の y 座標をそれぞれ e, f として、式 (1) の証明を考える。以下の問に答えよ。

(a) 曲線 AFB と曲線 AEB をそれぞれ $y = Y_1(x)$, $y = Y_2(x)$ とする。$\oint_C M\,dx$ を、積分範囲として a, b, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ を用いた面積分として表せ。

(b) 式 (1) を証明せよ。

問 2 $M = xy + y^2$, $N = x^2$ とし、閉曲線 C は $y = x$ と $y = x^2$ によってつくられるとする。式 (1) の左辺と右辺をそれぞれ計算して求め、両者が等しいことを示せ。

問 3 図 2 のような閉曲線 C_0 に囲まれた領域 R_0 を考える。このとき、式 (1) は成立するか。答案用紙に図 2 を描き、理由とともに述べよ。

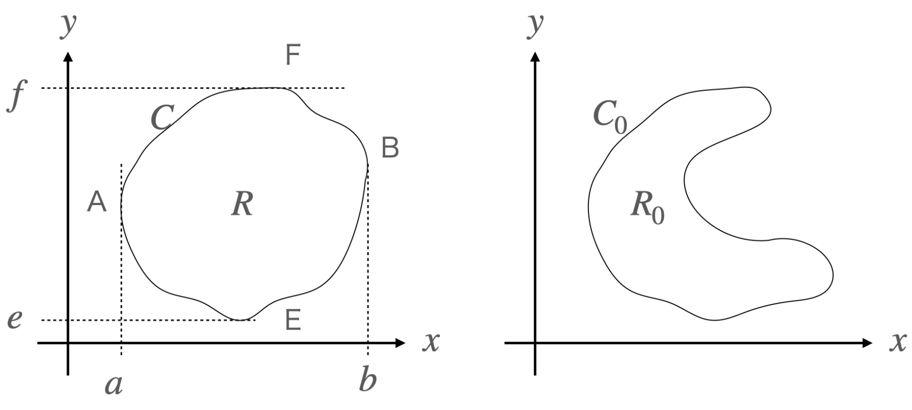

図 1　　図2

専門・問題 4

体積 V_b (m^3) の気球がある。その下部には穴が空いており気球内部の空気を外から熱することができる。また、気球の中と外の気圧は同じである。気球（ただし気球内の空気をのぞく）と機材を載せたかごの総質量を M (kg) とする。気温 T (K)、気圧 P (Pa) の大気中でこの熱気球を浮揚させるためには、気球内部の温度を何 K 以上にする必要があるか考えてみよう。なお、気球の体積は変化せず、また気球自体の素材や機材やかごの体積は無視できるとする。

問 1 気球内部の空気が一様に十分に暖まり、気球とかごが静かに浮いた瞬間の力のつりあいの式を書け。ただし、外気の密度を ρ ($\mathrm{kg\ m^{-3}}$)、気球内部の空気の密度を ρ' ($\mathrm{kg\ m^{-3}}$)、重力加速度の大きさを g ($\mathrm{m\ s^{-2}}$) とする。

問 2 ある体積 V の空気のモル数 n と密度 ρ の関係は、$nM_{\mathrm{air}} = \rho V$ と書ける。ここで M_{air} ($\mathrm{kg\ kmol^{-1}}$) は空気の平均モル質量である。一般気体定数を R ($\mathrm{J\ K^{-1}\ kmol^{-1}}$) として、外気について密度と気温と気圧の関係を記せ。ただし、空気は理想気体とみなせるものとする。

問 3 気球とかごが地面から浮いた瞬間の気球内部の空気の温度を T' とする。T' を T, ρ, V_b, M で表せ。

問 4 $T = 300$ K、$\rho = 1.2\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$、$V_b = 500\ \mathrm{m}^3$、$M = 100$ kg の時、T' はいくらか。有効数字 2 桁で答えよ。