

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和4年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和4年2月

専門・問題1

問1 直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル関数 $\mathbf{a} = (z, z+x, xy)$ に関して以下を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \mathbf{a}$

(b) $\nabla \times \mathbf{a}$

問2 次の式を満たす複素数 z の実部と虚部を求めよ。ただし、虚数単位を i とする。

(a) $e^z = \sqrt{3} + 3i$

(b) $z^2 = -4i$

問3 以下を求めよ。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^2 dx$$

問4 以下の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - x)(1 - e^{-y})$$

専門・問題2

問1 図1のように、一端を固定した長さ l の糸の先端に質量 m の質点がついている単振り子を考える。糸の質量は無視することができ、また伸び縮みしないものとする。重力加速度を g として、以下の問に答えよ。

- (a) 糸と鉛直とのなす角が θ のとき、角速度 $d\theta/dt$ を用いて固定端まわりの角運動量を記せ。ここで、 t は時間を表す変数である。また、固定端まわりの慣性モーメントを記せ。
- (b) このときの、固定端まわりの力のモーメントを記せ。
- (c) 質点の運動に関する方程式を立て、振り子の周期を求めよ。ただし、 θ は十分小さく、 $\sin\theta \sim \theta$ と近似できるものとする。

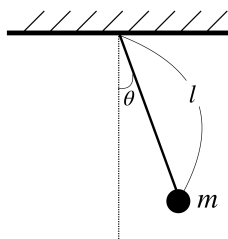


図1:

問2 圧力 P_0 、温度 T_0 で2モルの理想気体を図2のような直方体で体積 $2V_0$ の容器にいれたあと、断熱素材でできた厚さを無視できるピストンで容器の中の体積を等しく二等分し、それぞれA側とB側とする。

このあと、A側は元の温度を保ち、B側の温度を上げ $T_0 + \Delta T$ に保つときのことを考える。以下のそれぞれの場合について、問に答えよ。

- (a) ピストンが固定されている場合、A側とB側の圧力を求めよ。
- (b) ピストンが抵抗なく動ける場合、A側とB側の体積と圧力を求めよ。

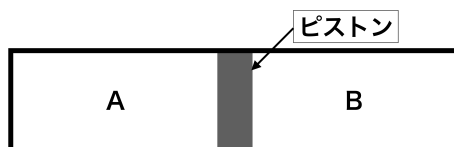


図2:

専門・問題3

次の連立偏微分方程式を解くことを考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで、 a, b は実定数である。ただし、 $a + b \neq 0$ とする。この問題では方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書き、 A の固有値 λ_1, λ_2 に対して

$$AB = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

を満足する行列 B による変数変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

により得られる二つの偏微分方程式

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

を解く。以下の問に答えよ。

問1 行列 A の固有値を求めよ。

問2 式(3)を満足する行列 B とその逆行列 B^{-1} を求めよ。

問3 式(2)から式(5)を導出する過程を記せ。

問4 $\phi_1(x, t) = f(x - \lambda_1 t)$, $\phi_2(x, t) = g(x - \lambda_2 t)$ は式(5)を満足することを示せ。なお、 f, g は任意の微分可能な連続関数である。

問5 初期に、 $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $v(x, 0) = 0$ のときの $u(x, t)$, $v(x, t)$ を求めよ。

問6 $a = 1$, $b = 2$ とし、横軸に x を取って、問5で得た $u(x, t)$ と $v(x, t)$ 、それぞれの x 分布の概略を $t = 0$ の時と、 t がある程度大きい時について描け。

専門・問題4

一つの月（衛星）をもつ惑星のまわりを、惑星と月との万有引力を受けながら、それらの共通重心点Cのまわりを周回する人工衛星を考える。また、惑星と月と人工衛星は点Cのまわりを同じ軌道面内で円運動している。

人工衛星の質量 m は、惑星の質量 M_p や月の質量 M_s に比べて極めて小さく、惑星と月の運動に影響を与えない。人工衛星、惑星、月は質点として考えてよいが、 $M_p > M_s$ とする。

惑星と月との距離を L_0 、万有引力定数を G として、以下の間に答えよ。他の天体の影響は考えなくてよい。

問1 点Cと惑星との距離 L_G を求めよ。

問2 点Cのまわりを月が周回する角速度 ω_M を求めよ。

問3 図1のように、惑星（点P）と月（点S）を結ぶ直線に沿って x 軸を取る。人工衛星が x 軸上にあるとき、人工衛星にはたらく二つの天体からの万有引力の合力を $F(x)$ とする。図1と同じ座標軸を答案用紙に書き写した上で、 $F(x)$ の概形をその座標軸上にグラフで表せ。 x 軸上には、共通重心点Cも示すこと。

問4 人工衛星が点Cのまわりを ω_M で周回できる点は x 軸上にいくつあるか。その点数を答えよ。

問5 人工衛星、惑星、月の位置が正三角形をなす場合、人工衛星は点Cのまわりを ω_M で周回できる。このとき、人工衛星にはたらく力の向きと大きさについて論ぜよ。

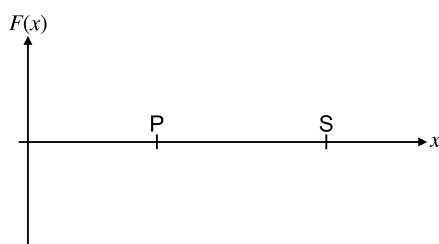


図1: