

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成26年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

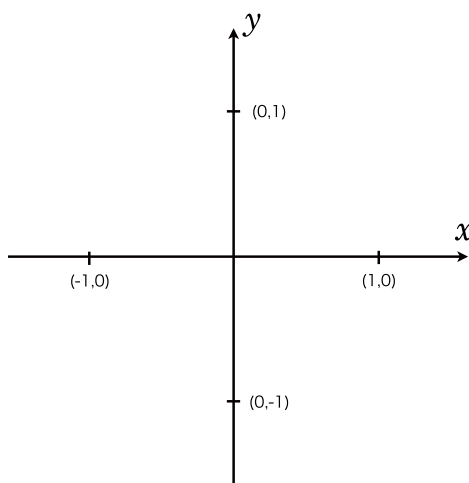
問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成25年8月

問題 1 : 必答問題

問 1 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ で与えられるスカラー場について、以下の問に答えよ。

- (a) 座標 $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ を通る $f(x, y) = \text{一定}$ の線をそれぞれ図示せよ。
- (b) ∇f を x, y を用いて表し、座標 $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ での ∇f を求めよ。また、(a) で使った図面上に、各座標におけるベクトル ∇f をそれぞれの座標を始点とした矢印で図示せよ。
- (c) ベクトル場 ∇f の発散を求めよ。



問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ

- (a) $(1 - x)\frac{dy}{dx} + y = 0$
- (b) $\frac{dy}{dx} + y = x$
- (c) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

問 3 x は実数とする。以下の問に答えよ。

- (a) 関数

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

の最大値と最小値を求め、 $y = f(x)$ を図示せよ。

(b) 関数

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

について、極限

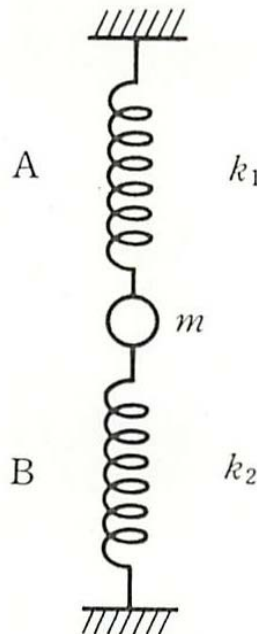
$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \lim_{x \rightarrow -0} f(x)$$

をそれぞれ求め、 $y = f(x)$ を図示せよ。

問題 2 : 必答問題

問 1 下図のように、ばね定数 k_1, k_2 の質量が無視できるばね A, B で、質量 m の質点を天井と床から引っ張り、物体を上下に振動させる場合を考える。重力加速度の大きさを g とするとき、以下の (a)~(c) に答えよ。

- ばね A, B の自然長を l_1, l_2 、つり合いの状態での長さを l'_1, l'_2 とした場合に、質点のつり合いの式を書け。
- 質点のつり合いの位置からの変位を x とし、質点の運動方程式を書け。なお、 x は鉛直上方を正とする。
- この振動の周期を m, k_1, k_2 を用いて書け。

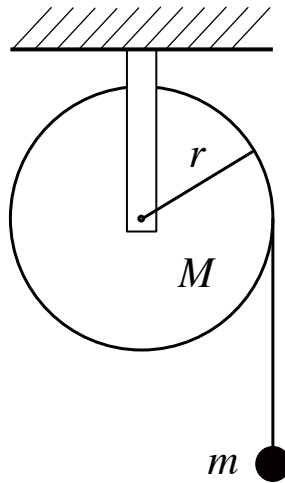


問 2 速さ 100m/s で飛んでいる質量 0.01kg の弾丸について考える。以下の (a) と (b) に答えよ。

- この弾丸がサンドバッグに当たって止まったとする。もし、摩擦による仕事が全て弾丸の熱エネルギーに変換され、サンドバッグは動かず、温度も変わらないとすると、止まった弾丸の温度上昇は何度になるか。ただし、弾丸の比熱は $125\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ とする。
- この弾丸が質量 0.09kg の静止した木片に当たって食い込み、木片と共に動いたとする。この時の速さを求めよ。また、木片の温度は変わらないとすると、弾丸の温度上昇は何度になるか。

問3 質量 M 、半径 r の定滑車に質量の無視できる糸を巻き付け、糸の自由端に質量 m のおもりをつるす。重力加速度の大きさを g とするとき、以下の (a)~(c) に答えよ。

- (a) 糸の張力を T とするとき、おもりの運動方程式を書け。
- (b) 定滑車の慣性モーメントを I とするとき、回転運動の方程式を書け。
- (c) 質量 M 、半径 r の円盤の中心軸に関する慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}Mr^2$ と表される。おもりの落下する加速度の大きさと糸の張力を求めよ。



問題 3 : 選択問題・数学

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

問 1 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ。ただし、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とする。

問 2 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトル P_1, P_2, P_3 を求めよ。

問 3 行列 A を対角化せよ。

問 4 指数関数 $\exp(x)$ を

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

とるように、行列 S の指数関数を

$$\exp(S) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} S^n$$

と定義するとき、 $\exp(kA)$ を求めよ。ここで、 E は単位行列、 k は任意の実数とする。

問題 4 : 選択問題・数学

関数 $f(x, t)$ の偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty) \quad (1)$$

をフーリエ変換を用いて解くことを考える。ここで、 f は $t = 0$ のとき

$$f(x, 0) = e^{-x^2} \quad (2)$$

を満たし、 f とその偏導関数は共に $x \rightarrow \pm\infty$ において 0 でありフーリエ変換可能とする。また、 f の x に関するフーリエ変換を $F(k, t)$ とすると、

$$F(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, t) e^{ikx} dk \quad (4)$$

が成り立つ。以下の問に答えよ。

問 1 $\partial f / \partial x$ の x についてのフーリエ変換を F_1 とおくと、

$$F_1 = ikF \quad (5)$$

が成り立つことを示せ。

問 2 方程式 (1) の両辺を x についてフーリエ変換し、 F が満たす方程式を導け。問 3 $f(x, 0)$ の x に関するフーリエ変換を $F(k, 0)$ とする。 $F(k, 0)$ を用いて、問 2 で得られた方程式を解け。問 4 条件 (2) の両辺をフーリエ変換し、 $F(k, 0)$ を求めよ。ただし、以下では実数 α, β ($\alpha > 0$) について

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+i\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (6)$$

が成り立つことを用いてよい。

問 5 問 3 と問 4 より得られる解をフーリエ逆変換し、方程式 (1) の条件 (2) を満たす解を求めよ。

問題 5 : 選択問題・物理学

地球と火星が公転面を共有し、それぞれ半径 a, b で太陽の周りを円運動しているとす。宇宙船 P を地球軌道から速度 v_A で接線方向に打ち出し、打ち出し時の地球と太陽に関して反対側の位置で火星に衝突させたい (下図)。宇宙船に働く力が太陽からの引力のみであると仮定し、宇宙船の質量を m 、太陽の質量を M 、P と太陽との距離を r 、万有引力定数を G とするとき、以下の問に答えよ。

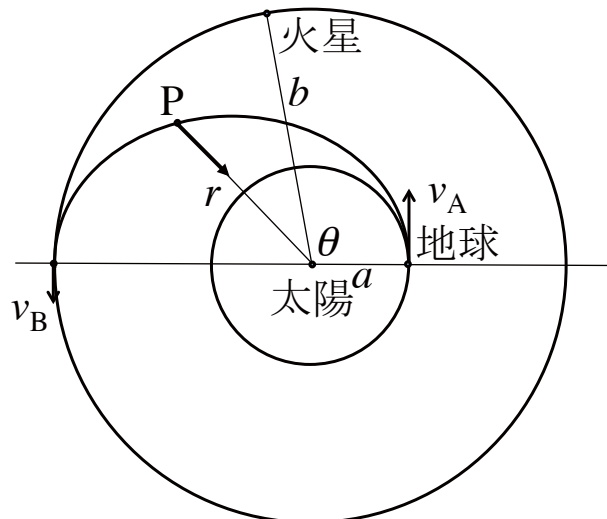
問 1 万有引力の法則を書け。

問 2 太陽からの距離が r であるときの宇宙船 P の位置エネルギーを求めよ。

問 3 角運動量保存則を用いて宇宙船 P が火星軌道に到達した時の速度 v_B を初速度 v_A で表せ。

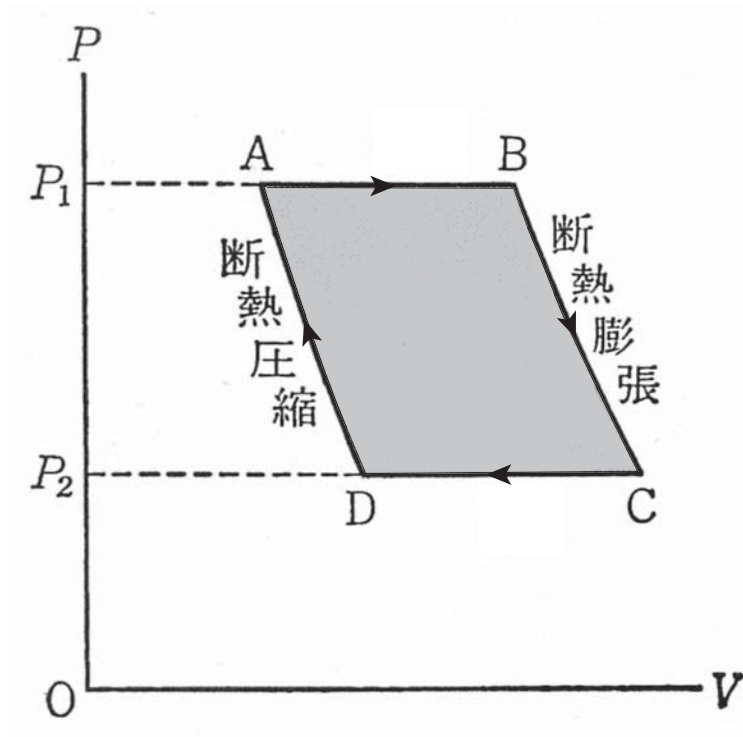
問 4 宇宙船 P の初速度 v_A はどのような値に決めればよいか。

問 5 太陽から見た地球と火星のなす角 θ がどのような値のときに P を打ち出せばよいか。ケプラーの第 3 法則「惑星の公転周期の 2 乗は、軌道の長半径の 3 乗に比例する」を利用して求めよ。



問題 6 : 選択問題・物理学

- 問 1 圧力を P 、体積を V 、温度を T とし、1 モルの理想気体が準静的に断熱変化をする過程を考える。この場合、熱力学第一法則はどのように表せるか。さらに、 P と T には $TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{一定}$ の関係があることを示せ。ここで、 γ は比熱比で定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V を用いて、 $\gamma = C_P/C_V$ で与えられる。また、 C_P と C_V は、温度によらず一定であるものとする。
- 問 2 理想気体が下図のような準静的過程でサイクル $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ を行うときの熱効率を P_1, P_2 および γ で表せ。問 1 にある P と T の関係を用いよ。熱効率は、高熱源から受け取る熱量に対する外部への仕事の比で定義される。因みに、このサイクルをジュール・サイクルという。



問題 7 : 選択問題・地球物理学

気候とその変動に関する以下の問に答えよ。

問 1 地球大気のエネルギー収支は、(a) 太陽放射 (短波放射) の伝達過程、(b) 地球放射 (長波放射) の伝達過程、(c) その他の過程で決まっている。それぞれの過程について、50~100 字で説明せよ。

問 2 図 1 は全球平均の対流圏中層における気温の時系列である。

- (a) 1979 年から 2009 年にかけて全般にゆるやかな上昇が見られる。この原因を 100 字程度で議論せよ。
- (b) 1983 年、1987 年、1998 年には、一時的な気温の極大が見られる。これはどのような現象に伴うものか述べよ。

問 3 図 2 は全球平均の成層圏中層における気温の時系列である。

- (a) 1979 年から 2009 年にかけて全般にゆるやかな下降が見られる。この原因を 100 字程度で議論せよ。
- (b) 1982 年~1983 年頃と 1991 年~1992 年頃には、一時的な気温の極大が見られる。これらはいずれも熱帯における大規模な火山噴火の影響であると考えられている。気温が上昇した理由について、50 字程度で議論せよ。

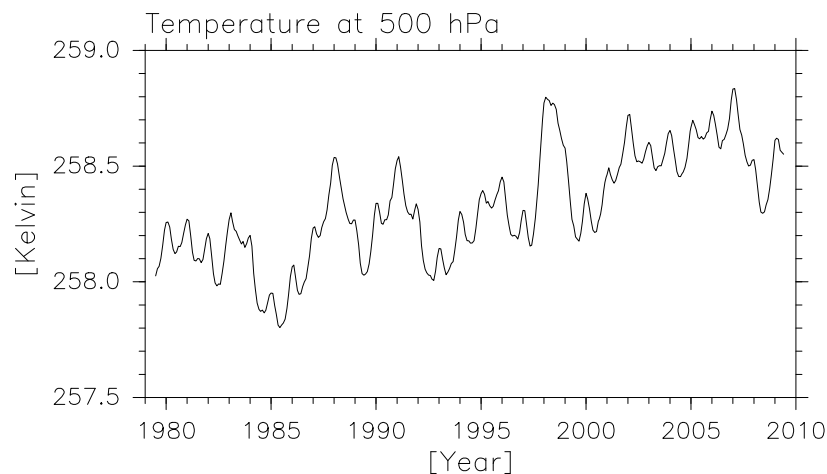


図 1: 全球平均の 500hPa (高度約 5km) における気温の時系列。13ヶ月の移動平均を施してある。

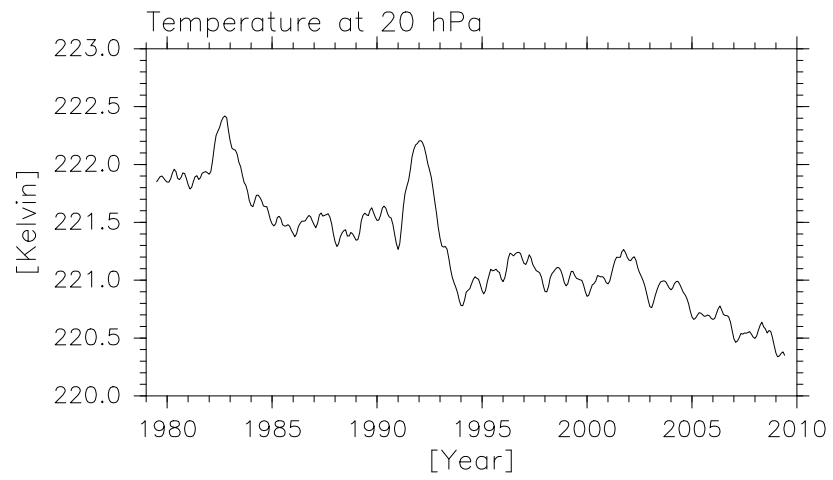


図 2: 全球平均の 20hPa (高度約 27km) における気温の時系列。13ヶ月の移動平均を施してある。

問題 8 : 選択問題・地球物理学

北緯 30 度の海域において、海水の密度場を 2 層で近似し、上層の密度を ρ_0 、下層の密度を $\rho_0 + \Delta\rho$ とする。上下層の境界面（密度境界面）の東西断面が図 1 の実線のような分布になっている場合を考える。地衡流近似が成り立ち、下層には流れがないとして、上層の南北方向の流れを考える。以下の問いに答えよ。

問 1 地衡流近似では、ある 2 つの力がバランスしている。その 2 つの力とは何と何か。

問 2 以下の物理量の東西分布はどのようになるか、地点 A - F との位置関係がわかるように、概略を図示せよ。

- a: 海面高度（海面のジオイドからのずれ）
- b: 海面での流速の南北方向成分
- c: 海面下 100 m での流速の南北方向成分

問 3 $\Delta\rho/\rho_0 = 2/1000$ のとき、A と F の海面高度の差を求めよ。

問 4 以下の a, b, c の場合、海面高度及び海面での流速はどうなるか。今までの設定の場合（問 2 及び問 3 の答え）を基準として答えよ（基準に対して、2 倍になる、変らない、などのように解答せよ）。

- a: $\Delta\rho$ が 2 倍の場合
- b: 海域の緯度が北緯 60 度である場合
- c: 海域の緯度が南緯 30 度である場合

問 5 海洋の流れを知る方法には、上記のように海水の密度分布から推定する方法の他に、どのようなものがあるか。海洋観測（リモートセンシングを含む）で用いられている方法を、2 つ例を挙げて、それぞれの原理を簡略に説明せよ。また、それぞれの方法は、オイラー的手法か、ラグランジュ的手法か。

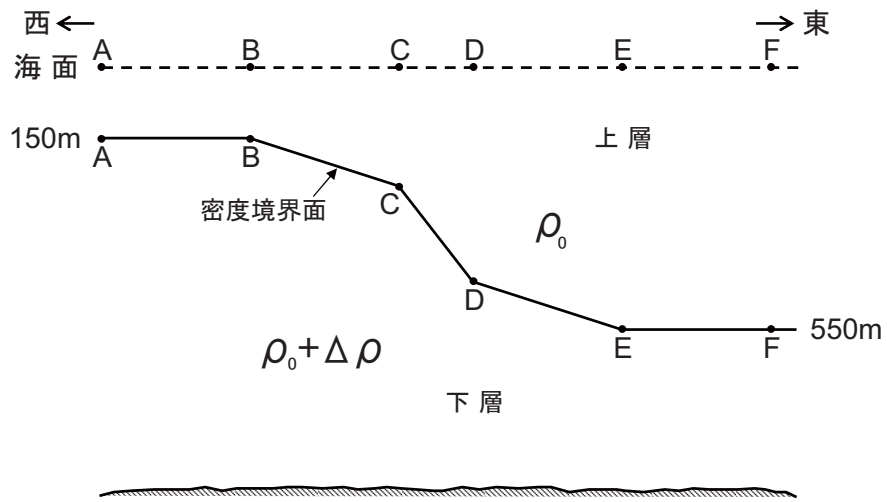


図 1:

問題 9 : 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 大気中には、台風などのように強い低気圧性の渦は存在するが、対応するような強い高気圧性の渦は存在しない。その理由を力学的に説明せよ。
- (2) 温帯低気圧・温帯高気圧の生成メカニズムを説明せよ。さらに、大気大循環におけるこれらの擾乱の役割を述べよ。
- (3) 天気予報や気候予測に用いられる数値モデルの概要について説明せよ。
- (4) 海氷と冰山について、生成機構や生成される海域の相違点などを含めて、説明せよ。
- (5) 北半球の沿岸陸棚海域では、水位や流速の変動は $1\sim 5\text{m/s}$ 程度の位相速度で岸を右に見ながら伝播する傾向がある。これにはある波動が関係しているが、その波動について、津波との違いも含めて説明せよ。
- (6) 地球規模の海洋深層循環は、主に 2 つの海域からの重い水の沈み込みを起点としている。その 2 つの海域とそこでできる水塊の名前を挙げ、それぞれの海域において重い水が生成される機構を説明せよ。