

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

平成20年度大学院修士課程入学試験問題  
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成20年2月

## 専門・問題 I

問 1 以下の問に答えよ。

ある  $2 \times 2$  行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$ 、それに属する固有ベクトルをそれぞれ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  として次の各問に答えよ。 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  は単位ベクトルとする。

(a) 任意のベクトル  $\vec{x}$  が行列  $A$  の固有ベクトルの 1 次結合  $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$  と書けるとき、 $\vec{x}$  を行列  $A$  により 1 次変換したベクトル  $\vec{y}$  を  $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$  で表せ。 $c_1, c_2$  は定数とする。

(b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、以下の問に答えよ。

- (1)  $\lambda_1, \lambda_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$  を求めよ。
- (2)  $A$  による 1 次変換で方向が変化しない単位ベクトルをすべて求めよ。
- (3)  $A^{-1}$  による 1 次変換で方向が変化しない単位ベクトルをすべて求めよ。

問 2 位置ベクトルを  $\vec{r} = (x, y, z)$  とし、 $r = |\vec{r}|$  とするとき、次の数式を計算せよ。

(a)  $\nabla(r^2 e^{-r})$

(b)  $\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$

問 3  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + ay = bx$  の微分方程式について以下の問に答えよ。ただし、 $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$  である。

- (a)  $a = 3, b = 0$  の場合の解を求めよ。
- (b)  $a = 3, b = 1$  の場合の解を求めよ。
- (c)  $a = 4, b = 0$  の場合の解を求めよ。

## 専門・問題 II

関数  $f(t)$  を次のように定義するとき、以下の問に答えよ。

$$f(t) = \begin{cases} te^{-bt} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ただし、 $b > 0$  とする。

(a)  $f(t)$  のフーリエ変換  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  を求めよ。ここで、 $i = \sqrt{-1}$  とする。

(b)  $|F(\omega)|^2$  を求めよ。

(c)  $E_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$  として、 $E_{\omega}$  を求めよ。

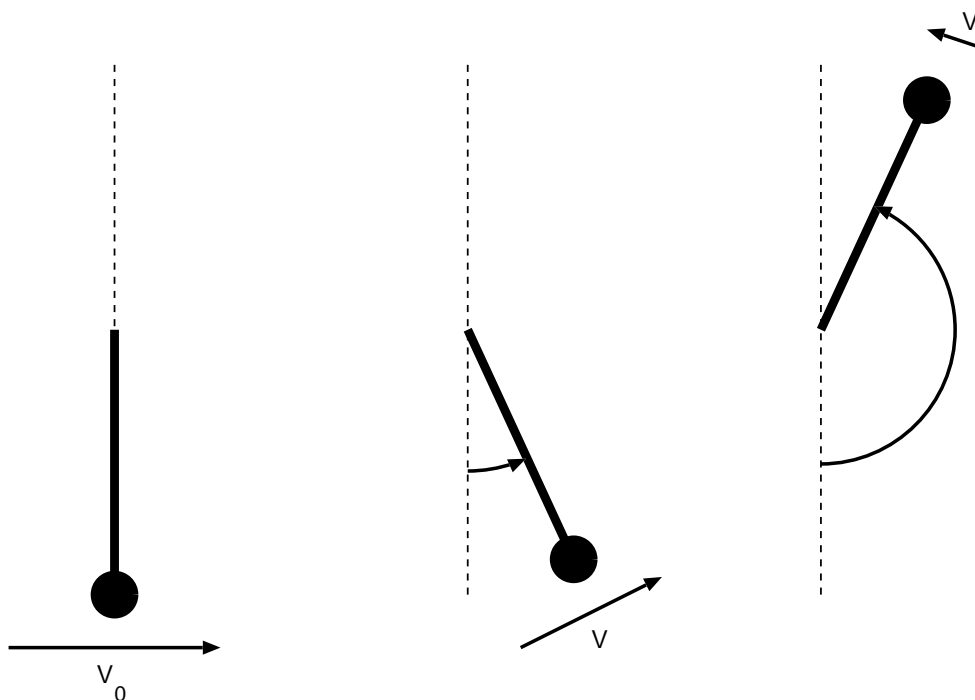
(d)  $E_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$  として、 $E_t$  を求めよ。

## 専門・問題 III

以下の問にすべて答えよ。

問 1 図のように、一端を固定された重さの無視できる長さ  $l$  の変形しない棒の先に、質量  $m$  の質点をつける。この棒は鉛直平面内を自由に回転できるものとする。また、摩擦は無視できるとする。最下点において初速  $v_0$  を与える。以下の問に答えよ。なお、重力加速度の大きさを  $g$  とせよ。

- (a) 鉛直下向きに対して棒のなす角度を  $\theta$  (最下点で  $\theta = 0$ 、最上点で  $\theta = \pi$ )、その時の質点の速さを  $v$  として、力学的エネルギー保存の式を書け。
- (b) 次の運動が生じる  $v_0$  の条件をそれぞれ求めよ。
- (1)  $|\theta| \leq \pi/2$  の範囲での振動
  - (2)  $|\theta| < \pi$  の範囲での振動
  - (3) 質点の円運動
- (c) 棒ではなく長さ  $l$  のひもの場合に、ひもの張力の大きさを  $R$  としてひもに沿う方向の力のつり合いの式を書け。さらに質点が円運動できる  $v_0$  の条件を求めよ。



問 2 水の比熱は  $100^{\circ}\text{C}$  未満の範囲で  $4.2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  である。

- (a)  $30^{\circ}\text{C}$  の水  $10 \text{ kg}$  に  $90^{\circ}\text{C}$  の湯をまぜて全体の温度を  $40^{\circ}\text{C}$  にしたい。 $90^{\circ}\text{C}$  の湯は何  $\text{kg}$  必要か。熱のロスは無視してよい。
- (b)  $100 \text{ g}$  の鉛の塊を  $50^{\circ}\text{C}$  に熱し、 $17^{\circ}\text{C}$  の水  $30 \text{ g}$  に入れたところ、両者の温度が  $20^{\circ}\text{C}$  となった。熱のロスが無視できるとすると、鉛の比熱はいくらか。

問 3 1 気圧 ( $1.01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ ) のもとにおいて、 $100^{\circ}\text{C}$  の水  $1 \text{ kg}$  は  $1.04 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 、 $100^{\circ}\text{C}$  の水蒸気  $1 \text{ kg}$  は  $1.67 \text{ m}^3$  の体積を占める。また、 $100^{\circ}\text{C}$  における水の気化熱は  $2.27 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$  である。いま、1 気圧の下で、 $100^{\circ}\text{C}$  の水  $1.00 \text{ kg}$  を加熱してすべて  $100^{\circ}\text{C}$  の水蒸気にした。以下の問に答えよ。

- (a) この過程において、水が外に対してした仕事はいくらか。
- (b) 内部エネルギーの増加はいくらか。
- (c)  $100^{\circ}\text{C}$  の水と  $100^{\circ}\text{C}$  の水蒸気の内部エネルギーに差がある理由を述べよ。

## 専門・問題 IV

一端が固定され、重さの無視できる変形しない棒がある。固定されていない方の先端に質量  $m$  のおもりを取り付けて剛体振り子をつくり、微小振幅で振らしたときの運動について考える。摩擦はないものとし、棒の固定端からおもりの重心までの長さを  $l$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とするとき、以下の問に答えよ。

- (a) おもりの大きさが  $l$  に対して無視できるくらい小さく、おもりを質点と見なすことができる場合の振動の周期を求めよ。
- (b) 前問 (a) の振り子の、固定端に関する慣性モーメントを  $I$  とする。 $I$  を  $m$  と  $l$  の式で表せ。
- (c) おもりの大きさが  $l$  に対して無視できない場合、この振り子の慣性モーメントは前問 (b) で求めた  $I$  より大きくなる。それはなぜか。また、その値を  $I + I_G$  とするとき、 $I_G$  は何を表すか、物理的に説明せよ。
- (d) 前問 (c) において、振り子の運動を記述する方程式を記し、振り子の周期を求めよ。ただし、 $I_G$  を具体的に求める必要はない。
- (e) 次の半径と質量を持つ密度一様な球形のおもりを用いて題意のような剛体振り子を作成する。

振り子 (i) 半径  $a$ , 質量  $m$

振り子 (ii) 半径  $b$ , 質量  $m$

振り子 (iii) 半径  $a$ , 質量  $M$

ただし、 $a < b$ ,  $m < M$  とする。これら 3 種類の振り子の振動周期を比較するとどうなるか、その理由も含めて述べよ。