

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成19年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成19年2月

専門・問題 I

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の関数 $f(r)$ ($r > 0$) を考える。 $f' = \frac{df}{dr}$, $f'' = \frac{d^2f}{dr^2}$ として、次の問に答えよ。 [a] ~ [e] は微分記号を使わずに、 r, x, y を用いて答えよ。

問 1 $\frac{\partial f}{\partial x} = f' \times [a]$ とするとき、[a] を求めよ。

問 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'' \times [b] + f' \times [c]$ とするとき、[b], [c] をそれぞれ求めよ。

問 3 $\nabla^2 f = f'' \times [d] + f' \times [e]$ とするとき、[d], [e] をそれぞれ求めよ。

問 4 $\nabla^2 f = 0$ を満たす関数 $f(r)$ を条件 $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ のもとで求めよ。

専門・問題 II

中心力 $F(\boldsymbol{r}) = -k\boldsymbol{r}$ の作用を受ける質量 m の物体の運動を考える。ここで k は正の定数であり、 \boldsymbol{r} は位置ベクトルである。中心力のもとでの運動なので、物体は平面運動を行う。この平面を $x-y$ 平面とする。時刻 $t = 0$ において、 $x = A$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = B\omega$ とする。ここで $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であり、 A, B は 0 でない任意の定数である。以下の問に答えよ。

- 問 1 運動方程式を書き、初期条件を満たす解を求めよ。
- 問 2 この物体の軌道は力の中心（原点）を中心とする楕円であることを示せ。
- 問 3 時刻 t における物体の位置エネルギーを求めよ。
- 問 4 物体の力学的エネルギーが保存することを示し、その値を求めよ。
- 問 5 物体の角運動量は一定であることを示し、その値を求めよ。

専門・問題 III

$ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ ($a > 0$) について次の問に答えよ。

問 1 上の式の左辺が、任意の x, y (ただし、 $x = y = 0$ を除く) に対して正となるための必要十分条件は $ab - h^2 > 0$ であることを証明せよ。

問 2 $ab - h^2 > 0$ のとき、行列 $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の固有値が正であることを証明せよ。

問 3 $a = b = 3, h = 1, c = 2$ であるとき、 $ax^2 + 2hxy + by^2 = c$ が線形変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって、 $Au^2 + Bv^2 = C$ になる。 θ, A, B, C を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

専門・問題 IV

海中の潜水艦の浮力による運動を考える。簡単のため、潜水艦は高さ h , 水平面積 a の密度一様な直方体とし、海水の密度 ρ は鉛直方向に一定の勾配 ($\frac{d\rho}{dz} = \gamma$) で変化して海底からの高さ $z = z_0$ で $\rho = \rho_0$ になるとする。ここで、 z は上向きの鉛直座標である。潜水艦は海底や海面に接することはないとする。また、潜水艦の回転・圧縮・変形運動、および海水の運動や抵抗並びに熱伝導等の効果は無視する。以下の問に答えよ。

問 1 浮力に関する以下の説明の空欄 (a) と (b) に当てはまる語句を答えよ。

「アルキメデスの原理としても知られているように、流体中の物体に働く浮力の大きさはその物体が押しのけた流体の (a) に等しく、向きは (b) となる。」

問 2 海底からの高さ z における海水の密度を求めよ。

問 3 潜水艦の密度が ρ_1 で重心が海底からの高さ z に位置するとき、潜水艦に働く浮力と重力による正味の力を求めよ。ただし重力加速度は g とする。

問 4 潜水艦の鉛直方向の運動方程式を立てよ。また、潜水艦がつりあって静止しているときの潜水艦の重心の位置 z_1 を求めよ。

問 5 重心の位置が z_1 ($z_1 \neq z_0$) のところでつりあって静止していた潜水艦が、時刻 $t = t_0$ に排水または給水により密度を ρ_0 に変えた。 $\gamma < 0$ として、潜水艦がどのような運動をするか簡潔に記述せよ。ただし潜水艦の密度変化にかかる時間は無視してよい。