

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和8年度大学院修士課程秋季特別入試
基礎学力試験

数学・物理学(古典物理学)より計2問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和7年11月

問題 1

問 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(a) $\frac{dx}{dt} = -x + \sin t$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

問 2 以下を求めよ。

(a) 線積分 $\int_C (-y, x) \cdot d\mathbf{r}$ 。ただし \mathbf{r} は位置ベクトル (x, y) 、 C は原点を中心とする半径 1 の円で、反時計回りに積分する。

(b) $\log z^2 = i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i$ を満たす複素数 z を $x + iy$ の形で。ただし、 i は虚数単位、 n は任意整数、 x, y は実数とする。

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) における関数 $f = (ax^2 + by^2)e^{cz}$ およびベクトル $\mathbf{v} = -\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{j}$ を考える。ただし、 a, b, c は定数、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである。以下のものを求めよ。

(a) $\nabla^2 f$

(b) $\nabla \times \mathbf{v}$

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

問題 2

問 1 図 1 のように、鉛直に立てられた摩擦のないピストン・シリンダ装置の中に、 n モルの理想気体が入っている。ピストンの質量は M 、断面積は S である。このとき、以下の問に答えよ。ここで、重力加速度の大きさを g 、気体定数を R 、大気圧を P_{atm} とする。また、装置と外界の間に気体の出入りがないものとする。

- (a) はじめ、シリンダ内の気体の体積は V_0 であった。このときのシリンダ内の圧力、および気体の温度を求めよ。
- (b) つぎに、気体に熱を加えるとゆっくりと膨張し、はじめの体積の 2 倍になった。このとき、気体がピストンに対してなした仕事を求めよ。
- (c) (b) の過程において、加えた熱の総量はいくらか。ただし、定圧モル比熱は c_p である。

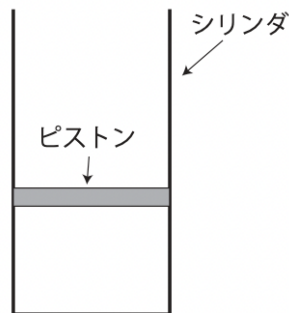


図 1

問 2 質量 m の物体を時刻 $t = 0$ において初速度 $v = 0$ で落下させる。鉛直下向きを正とした場合、物体には重力 mg に加え、速度 v に比例する抵抗 $-bv$ が働くとする（ただし、 b は正の定数）。以下の問に答えよ。なお、十分な高さから落下させるため地面との衝突は考えない。

- (a) 落下を開始して十分な時間が経過したとき、物体の運動は、近似的に等速度運動となる。この速度を終端速度 v_{∞} という。 v_{∞} を求めよ。
- (b) 時刻 $t > 0$ における物体の速度 v を求めよ。なお、 $0 < v < v_{\infty}$ であることに留意せよ。
- (c) $0 \leq t \leq \frac{4m}{b}$ における v の概略を図示せよ。抵抗が働かない場合（ $b = 0$ の場合）の速度ならびに終端速度 v_{∞} を補助線として加えること。

問 3 図 2 のように、エレベーターの天井の点 O に質量の無視できる長さ L の糸の一端を固定し、もう一端に質量 m の小球を付けた振り子がある。このエレベーターは鉛直上方に加速度 a_z で上昇して、振り子は鉛直面内で振れている。振り子のなす角を θ 、重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

(a) θ に関する運動方程式を書け。

(b) 振り子の角振動数を求めよ。ただし、 θ は小さいとし、 $\sin \theta \sim \theta$ と近似してよい。

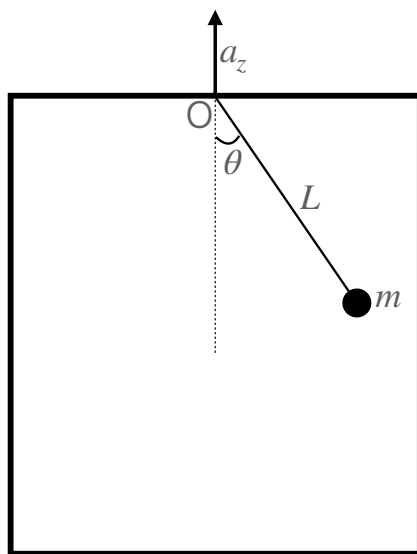


図 2