北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成 **11** 年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学・物理学・地球物理学から各 **3** 問, 計 **9** 問出題されている. その中から **4** 問選択し, 解答すること. 解答用紙には科目名と問題番号を記入すること.

数学・問題 I

問 1 n を自然数とするとき、定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\ dx$ を求めよ。

問 2 m を整数とし、$-\pi + 2m\pi \le x \le \pi + 2m\pi$ の範囲で $(x - 2m\pi)^2$ である周期 2πの周期関数を $f(x)$ とする。$f(x)$ を次のようにフーリエ級数展開する。

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

この式での、a_0, a_n 及び b_n を求めよ。

問 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を求めよ。

数学・問題 II

(x, y, z) 成分が $(-y/r^2, x/r^2, 0)$ であるベクトル $\mathbf{U}$ を考える。ここで、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$である。ベクトル $\mathbf{U}$ は $x = y = 0$ で特異性を持つことに注意。

問 1 $r = 0$ $(x = y = 0)$ ではない領域で、

(a) $\nabla \cdot \mathbf{U}$

(b) $\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{U})$

を求めよ。ここで、$\mathbf{k}$ は z方向の単位ベクトル。

問 2 $z = 0$ の平面上の、原点 $(x = y = 0)$ を中心とする半径 a の円を考える。この円の円周 C_0に沿って反時計回りに一回りする次の積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_{C_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}\, dl$

(b) $\displaystyle\int_{C_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}\, dl$

ここで、$\mathbf{n}$ は (x, y) 平面上の円周 C_0の外向き単位法線ベクトルであり、$\mathbf{s}$ は単位接線ベクトルである。また, l は円周 C_0 に沿って反時計回りに測った長さである。

問 3 $z = 0$ の平面上の任意の閉曲線 Cの周囲に沿って反時計回りに一回りする次の積分はどうなるか。論ぜよ。

(a) $\displaystyle\int_{C} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}\, dl$

(b) $\displaystyle\int_{C} \mathbf{U} \cdot \mathbf{s}\, dl$

ここで、$\mathbf{n}$ は (x, y) 平面上の曲線 Cの外向き単位法線ベクトルであり、$\mathbf{s}$ は単位接線ベクトルである。また, l は閉曲線 C に沿って反時計回りに測った長さである。なお、ストークスの定理とガウスの定理は証明無しに使って良いとする。

数学・問題 III

以下の初期値問題の解を記せ。

(1) $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 0$

(2) $\dfrac{dx}{dt} + \int_0^t x(\tau)d\tau = t, \qquad x(0) = 0$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin t, \qquad x(0) = 0, \quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$

(4) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t, \qquad x(0) = 0, \quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$

物理・問題 I

軽くて質量が無視できる伸縮しない長さ l の糸の上端を固定し、下端に質量 m のおもりをつるして、鉛直面内で円弧を描くように運動させる。重力加速度を g、糸の鉛直下方からの角度を θ として、以下の問いに答えよ。なお、摩擦や空気抵抗は無視できるものとする。

問 1 おもりが円運動をするための、おもりの最下端における速さ V に対する条件を求めよ。

問 2 $\theta = \alpha (0 \leq \alpha \leq \pi/2)$ の位置から糸を張った状態で静かにおもりを放して運動させる。支点の真下 $h (0 < h < l)$ の距離のところに細い釘が固定されているとき、糸がこの釘に巻き付く条件を示せ。

問 3 問 2 と同じ設定で、$\alpha = \pi/2$、$h = l/2$ としたときのおもりの運動を詳述せよ。

物理・問題 II

次の (1)〜(5) の内から**3 つ**を選んで答えよ．

(1) 流体と弾性体のずれ変形に対する応力の基本的な違いについて述べよ。

(2) 流れの場が流速ポテンシャルで表現できるための条件を示せ。またその理由を述べよ。

(3) 発散の無い２次元流は流線関数で表現できることを示し、その流線関数は定数をのぞき一意に定められることを示せ。

(4) 床にこぼれた油の上を歩くとき、水の場合より滑りやすい理由を述べよ。

(5) 飛行機が飛行中、翼の上に霧のようなものができることがある。その原因を述べよ。

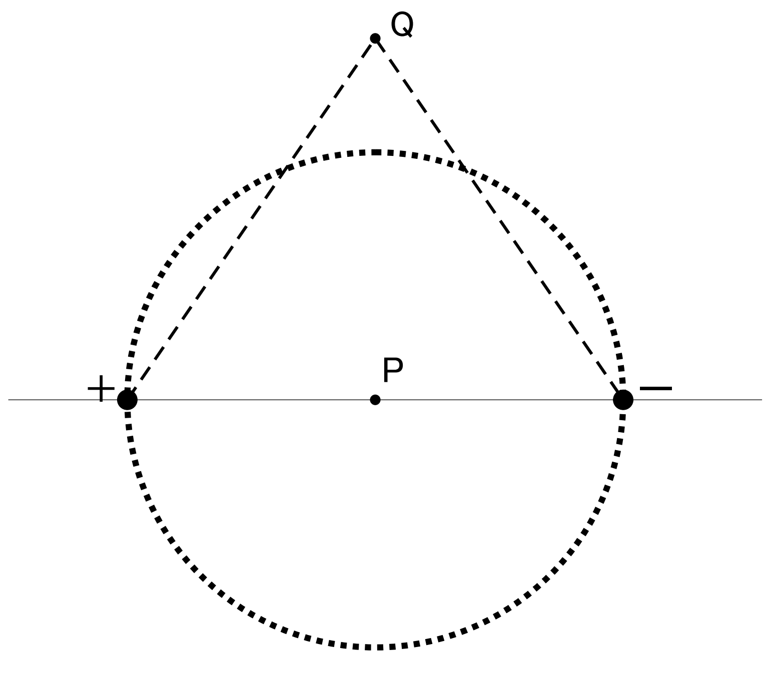
物理・問題 III

2 本の無限に長い円形の断面をもつ導線 (電気伝導度無限大) の線が均一の電気伝導度をもつ媒体の中に平行に埋め込まれている。この 2 つの導線の間に一定の電圧をかけ、電流を流す。導線の間隔を 2、導線の太さは十分に小さいとする。

問 1 この場合に出来る電場の形は、同じ配置の導線が真空中にあり、おのおの正と負に一様に帯電している場合の電場と同じであることを示せ。

問 2 二つの導線の中間の点 P における電流の大きさと、それぞれの導線から 2 の距離離れた点Qにおける電流の比とそれぞれの場所での方向を求めよ。

問 3 二つの導線の中間に軸を持つ半径 1 の円筒の部分 (図の点線の内側) の媒体をくり抜いたとき (電気伝導度を 0 にする) の全体の抵抗をくり抜く前と比較せよ。



地球物理学・問題 I

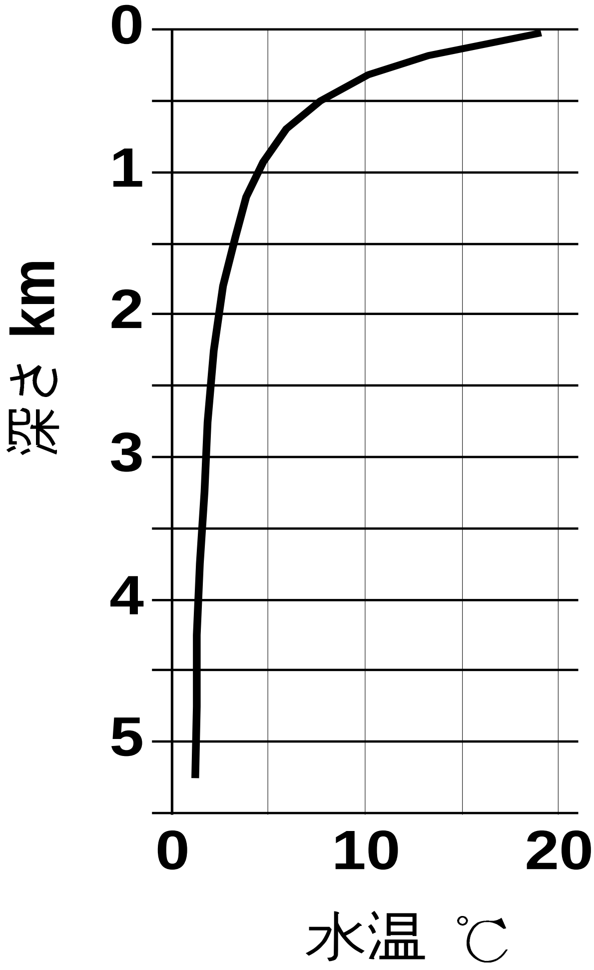
下の図は、全球平均した海洋の水温の鉛直分布を表したものであり、表層から深層に向かって指数関数的に減少しているプロファイルをしている。

問 1 湧昇による鉛直移流と 鉛直拡散がほぼバランスしているとして、水温に対する鉛直 1 次元の方程式を立てよ。但し、鉛直拡散係数 A_v および鉛直速度 w は定数とし、温度 T および鉛直座標は z という記号を用いること。

問 2 問 1 で立てた方程式から、温度の鉛直分布が指数関数 $T = \exp(z/h)$ で表せることを説明し、h を A_v と w で表わせ。

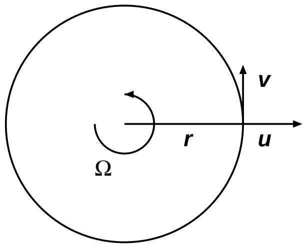
問 3 海水の平均的年齢 (最後に海洋表層を離れてからの時間) は、約 1000 年ということを使って、湧昇のおよその鉛直速度を求める方法を説明し、その値を示せ。

問 4 問 2 および問 3 の結果を利用して、鉛直拡散係数を求める方法を説明し、その値を示せ。なお、必要ならば図より h の値を見積もること。



地球物理学・問題 II

一定角速度 Ω で回転する非粘性流体中に存在する、回転軸対称の 2 次元運動を考える。回転軸からの距離を r、流速の動径成分を u、方位成分を v とする。流体の密度は一定 (ρ_0) とし、圧力を p とする。速度成分 u、v, 及び圧力 p は半径 r のみに依存すると仮定する。このとき以下の問に答よ。



問 1 回転座標系からみた動径方向の運動方程式は

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega v + \frac{v^2}{r} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

と書くことができる。式 (1) の右辺各項はそれぞれどのような力を表わしているか説明せよ。また、これらの三つの力がバランスした渦状の運動 $(u = 0,\ v \equiv v_g)$ は何と呼ばれる流れか記せ。

問 2 回転座標系からみた、流体粒子の回転軸回りの角運動量保存則 (単位質量当り) を r、v、Ωを用いて記せ。

問 3 流体は初期にバランスした渦状の流れ $(u = 0,\ v \equiv v_g)$ であるとする。このとき周囲の気圧場を乱すことなく、半径 r の渦リングの半径を $r + \delta r$ に変化させた時に生じる方位方向の速度の変化δvを、問 2 の保存則を用いて求めることにより、次の方位方向の運動方程式を求めよ。但し、δr、δvは微小量とし、その 2 次以上の項は無視する。

$$\frac{dv}{dt} = -(2\Omega + \frac{v}{r})\frac{dr}{dt} = -(2\Omega + \frac{v}{r})u \tag{2}$$

問 4 渦リングに対して問 3 と同様の変化を考慮することにより、半径 $r + \delta r$ における渦リングの動径方向の加速度は、式 (1) を用いて、

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta r = \frac{du}{dt} = -\zeta_a f_{local}\delta r \tag{3}$$

で与えられることを示せ。但し、

$$\zeta_a = (2\Omega + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_g)}{\partial r}), \qquad f_{local} = 2\Omega + \frac{2v_g}{r}$$

である。

問 5 式 (3) より $\zeta_a f_{local}$ の符号に依存して、渦リングの運動はどのようになるか定性的に説明せよ。また、このような議論を、地球の対流圏中緯度大気における総観規模運動に対して行ったときに適切な$\zeta_a f_{local}$の符号を記し、そうなる根拠を述べよ。

地球物理学・問題 III

問 1 から問 3 までについて各々の選択肢からもっともらしいものを 1 つ選べ。なお、問 **3** については問 **3-a** か問 **3-b** いずれか一方のみについて答えよ。

問 1 地球の大気の総質量は、全球を覆う厚さ約 (a) の水の質量に等しく、大気の熱総容量は、全球を覆う厚さ約 (b) の水の熱容量に等しい。全球平均した地表や大気に吸収される日射量は (c) 程度であるから、大気全体を 10K 暖めるのに必要な時間は (d) 程度である。

(a): (1) 1m (2) 2m (3) 10m (4) 20m (5) 100m (6) 200m

(b): (1) 2m (2) 10m (3) 20m (4) 100m (5) 200m (6) 1000m

(c): (1) $0.24\mathrm{W/m^2}$ (2) $2.4\mathrm{W/m^2}$ (3) $24\mathrm{W/m^2}$
(4) $240\mathrm{W/m^2}$ (5) $2400\mathrm{W/m^2}$ (6) $24000\mathrm{W/m^2}$

(d): (1) 1 時間 (2) 10 時間 (3) 4 日 (4) 1ヶ月 (5) 1 年 (6) 10 年

問 2 今から約 (e) 前に地球が誕生した。

今から約 (f) 前に最終氷期が終わってから今までの間は、グリーンランドと南極大陸のみが氷で覆われている。

現在の地球の温室効果に最も寄与している気体は (g) であり、寄与していない気体は (h) である。

(e): (1) 7800 万年 (2) 4 億 6000 万年 (3) 7 億 8000 万年
(4) 46 億年 (5) 78 億年 (6) 460 億年

(f): (1) 1 万年 (2) 10 万年 (3) 100 万年
(4) 1000 万年 (5) 1 億年 (6) 10 億年

(g): (1) 二酸化炭素 (2) メタン (3) 水蒸気
(4) フロン (5) 酸素 (6) 一酸化二窒素

(h): (1) 二酸化炭素 (2) メタン (3) 水蒸気
(4) フロン (5) 酸素 (6) 一酸化二窒素

問 3-a 全海洋平均塩分濃度は、1 リットルの真水に約 (i) の塩を溶かしたのに等しい。

海面における塩分濃度は、緯度に注目すると (j)、また海域に注目すると (k)。

深層水は (l) で生成され、全海洋に広がってゆく。

黒潮は海面では流速 (m) 程度で幅約 100km の流れなので、地衡流の式から、沖の海面高度は岸に比べて約 (n) なっていることが見積ることが出来る。

(i): (1) 35mg (2) 3.5g (3) 35g (4) 3.5kg (5) 35kg

(j): (1) 亜熱帯で高く高緯度で低い (2) 赤道域で低く高緯度で高い
(3) 亜熱帯で低く高緯度で高い (4) 赤道域で高く亜熱帯で低い
(5) 赤道域で低く高緯度で高い

(k): (1) 北太平洋で高く北大西洋で低い (2) 南太平洋で低く北太平洋で高い
(3) 北太平洋で低く北大西洋で高い (4) 南極海で高く北大西洋で低い
(5) 南極海で高く南太平洋で低い

(l): (1) 海氷生成のためオホーツク海 (2) 海氷生成のため北極海
(3) 蒸発のためグリーンランド海 (4) 海面冷却のためグリーンランド海
(5) 蒸発のため地中海

(m): (1) 1cm/s (2) 10cm/s (3) 1m/s (4) 10m/s (5) 100m/s

(n): (1) 10cm 低く (2) 1cm 低く (3) 1cm 高く (4) 10cm 高く (5) 1m 高く

問 3-b 中緯度における対流圏界面の平均的な高さは約 (o) であり、対流圏では大気温度は高さとともに約 (p) していく。対流圏中緯度では日々の天気現象を支配する総観規模擾乱が卓越している。この擾乱の代表的な水平スケールは約 (q) であり、代表的な水平風速は約 (r) である。これは、例えば 500 hPa 等圧面高度場でみたとき、この擾乱に伴う高度場の代表的な変動幅が約 (s) であることを意味している。また擾乱に伴う相対渦度の大きさは約 (t)。

(o): (1) 50000m (2) 30000m (3) 10000m (4) 3000m (5) 1000m (6) 500m

(p): (1) 4.5 K/km の割合で上昇 (2) 4.5 K/km の割合で下降
(3) 6.5 K/km の割合で上昇 (4) 6.5 K/km の割合で下降
(5) 8.5 K/km の割合で上昇 (6) 8.5 K/km の割合で下降

(q): (1) 1km (2) 10km (3) 100km (4) 1000km (5) 10000km (6) 100000km

(r): (1) 0.01m/s (2) 0.1m/s (3) 1m/s (4) 10m/s (5) 100 m/s (6) 1000 m/s

(s): (1) 0.1m (2) 1m (3) 10m (4) 100m (5) 1000m (6) 10000 m

(t): (1) 10^{-6} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 10 分の 1 の大きさに相当する
(2) 10^{-5} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 10 分の 1 の大きさに相当する
(3) 10^{-4} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 10 分の 1 の大きさに相当する
(4) 10^{-6} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 100 分の 1 の大きさに相当する
(5) 10^{-5} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 100 分の 1 の大きさに相当する
(6) 10^{-4} s^{-1} で、これは惑星渦度の約 100 分の 1 の大きさに相当する