北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成21年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3〜9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成20年8月

問題1： 必答問題

問 1 以下の積分を求めよ。

(a) $$\int_0^{\pi} \sin x \ \cos mx \ dx$$

ここで、m は整数。

(b) $$\int_O^P \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{r}$$

ここで、ϕ は、直交直線座標系 (x, y, z) で表すと $\phi = (x^2 + y + z)e^{(x^2-y)} - z^5$、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、O 点の (x, y, z) 座標は $(0, 0, 0)$、P 点の (x, y, z) 座標は $(1, 1, 1)$ とする。

問 2 直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と

行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して、以下のものを求めよ。

(a) ベクトル積: $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$

(b) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ の rotation: $\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r})$

(c) 行列の積: AB

(d) 行列式: $|\mathsf{A}|$

(e) 逆行列: A^{-1}

問 3 以下の初期値問題の解を求めよ。

(a) $$\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \qquad x(0) = 1$$

(b) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = t, \qquad x(0) = 1, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

(c) $$\frac{dx}{dt} = -4\int_0^t \left[x(\tau) - \frac{1}{8}t\right] d\tau, \qquad x(0) = 1$$

問題2：必答問題

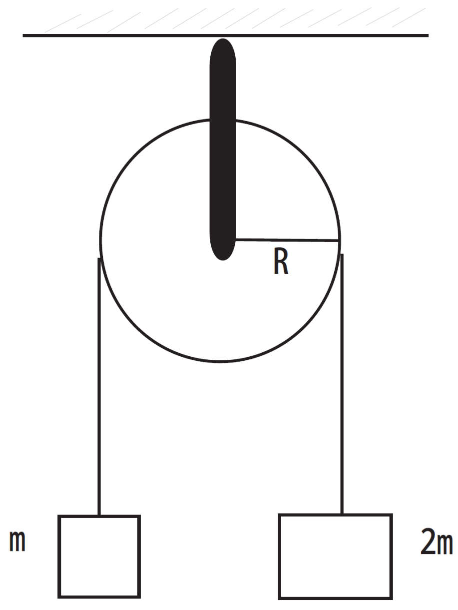
問1 地球を自転する球体であるとしたときに、自転による遠心力が重力におよぼす影響を考える。

(a) 緯度 θ の地表面にある質量 m の物体に働く遠心力を求めよ。自転の角速度には ω、地球の半径には R を用いよ。

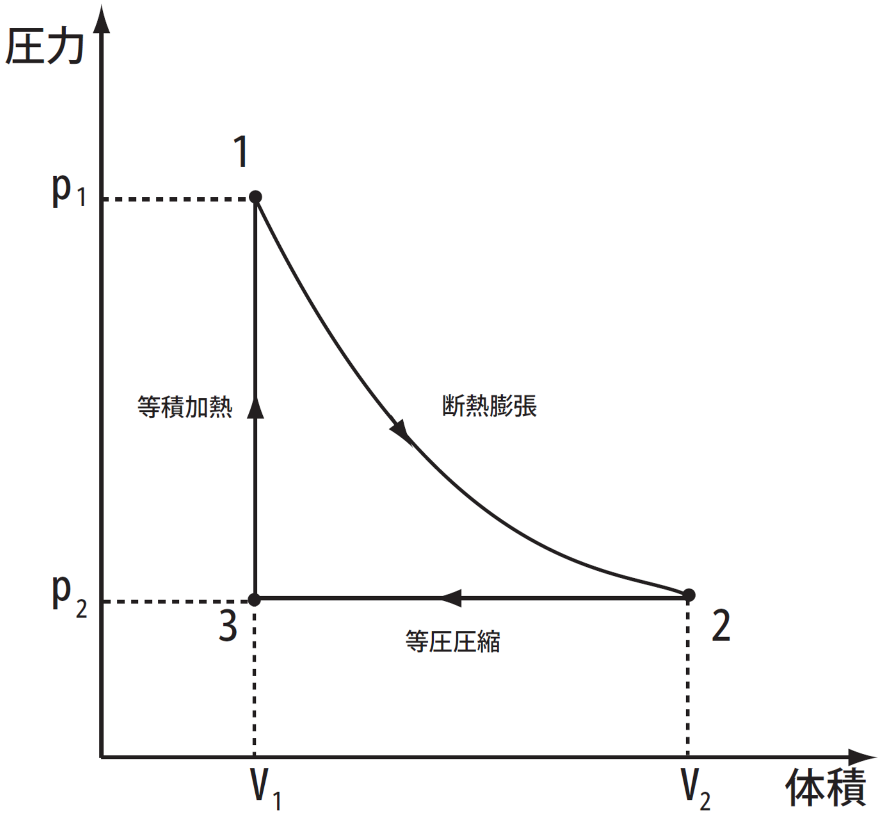
(b) 自転による遠心力を考慮したとき、赤道と北極とで重力を測定すると、どちらが何%大きいか、自転の角速度 ω を $7.3\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$、地球の半径 R を 6400 km、北極での重力加速度 g を $9.8\ \mathrm{m\ s}^{-2}$ として計算せよ。

(c) 赤道上を航行する観測船の上で物体を自由落下させたとき、観測船が東に向かって航行する場合と、同じ速さで西に向かって航行する場合とで、鉛直加速度の大きさは変化するか? 理由とともに述べよ。

問2 下図のように、半径 R、慣性モーメント I の定滑車が天井から吊るされている。この定滑車に、質量の無視できる糸で、右側に質量 $2m$ の物体、左側に質量 m の物体をつなぎ、右側の物体を手で支えている。手を離したあとの、右側の質量 $2m$ の物体の加速度を求めよ。重力加速度を g とする。



問 3 n モルの理想気体が、下図のような準静的サイクルを行うものとする。



過程 A: 状態 1(圧力 p_1、体積 V_1) $\rightarrow$ 状態 2(圧力 p_2、体積 V_2) 断熱膨張

過程 B: 状態 2(圧力 p_2、体積 V_2) $\rightarrow$ 状態 3(圧力 p_2、体積 V_1) 等圧圧縮

過程 C: 状態 3(圧力 p_2、体積 V_1) $\rightarrow$ 状態 1(圧力 p_1、体積 V_1) 等積加熱

ここで、状態 1、2、3 の温度を、それぞれ T_1、T_2、T_3 とし、定圧熱容量を C_p、定積熱容量を C_v とする。

(a) 過程 A において気体になされる仕事と加えられる熱量を求めよ。また T_1 と T_2 との関係を述べよ。

(b) 過程 B において気体になされる仕事と加えられる熱量を求めよ。

(c) 過程 C において気体になされる仕事と加えられる熱量を求めよ。

(d) 上記の結果と熱力学の第一法則を用いて、C_p と C_v の関係を求めよ。

問題３： 選択問題・数学

直交直線座標系 (x, y, z) の各座標軸方向の単位ベクトル (基本ベクトル) を、それぞれ、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と書く (x 方向が $\boldsymbol{i}$、y 方向が $\boldsymbol{j}$、z 方向が $\boldsymbol{k}$ である)。$x-y$ 平面上の 2 次元のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y)$ が与えられているとき、一般に、$\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \nabla\phi + \boldsymbol{k} \times \nabla\psi$$

というふうに二つの関数の微分の和で表現できる。ここで、ϕ と ψ は $x,\ y$ のみの関数である。

問 1　$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \quad \nabla^2\psi = \boldsymbol{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$ となることを証明せよ。

問 2　$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ の矩形領域を考える。

$$\boldsymbol{A} = -2\pi \cos \pi x \sin \pi y\ \boldsymbol{j}$$

の時

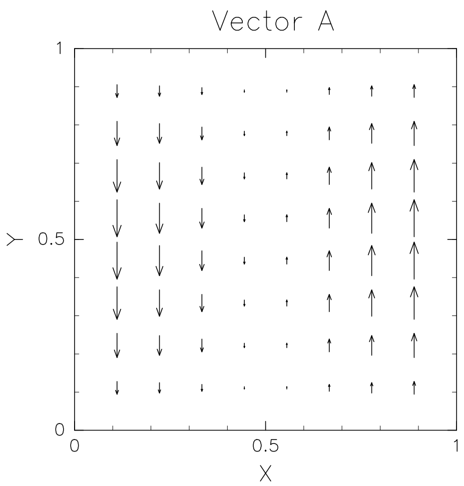
(a)　$\phi(x, y)$ が満たす方程式を求めよ。

(b)　**(a)** で求めた微分方程式を解け。ただし、境界条件は

$$(\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{i} = 0 \qquad \text{at} \quad x = 0,\ 1$$
$$(\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{j} = 0 \qquad \text{at} \quad y = 0,\ 1$$

とする。

参考のため、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の分布の概略を下に示す。



問 3　**問 2** で得た $\phi(x, y)$ の $x-y$ 面上での分布の概略を等値線を用いて図示せよ。さらに、その図に $\nabla\phi$ が表すベクトルを重ねて描け。ベクトルの大きさと方向が場所によりどのように変化するか、また、等値線との関係が分かるように注意して描くこと。

問題 4： 選択問題・数学

以下の問に答えよ。

すべての j について $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1$ の性質を持つ 3 行 3 列の行列 $\mathsf{A} = (a_{ij})$ を考える。このような行列は必ず固有値 1 をもつことが知られている。3 次元の列ベクトル $\boldsymbol{x_n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が $\boldsymbol{x_{n+1}} = \mathsf{A}\boldsymbol{x_n}$ にしたがうとき、以下の問に答えよ。ただし、$\boldsymbol{x_0}$ の各要素は非負であり、その要素の和は 1 であるとする。

問 1 $\boldsymbol{x_n}$ は、$n \geq 1$ において、その要素の和が 1 であることを証明せよ。

問 2 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & c \\ a & 1-b & 0 \\ 0 & b & 1-c \end{pmatrix} \qquad (0 < a,\ b,\ c < 1)$ のとき、

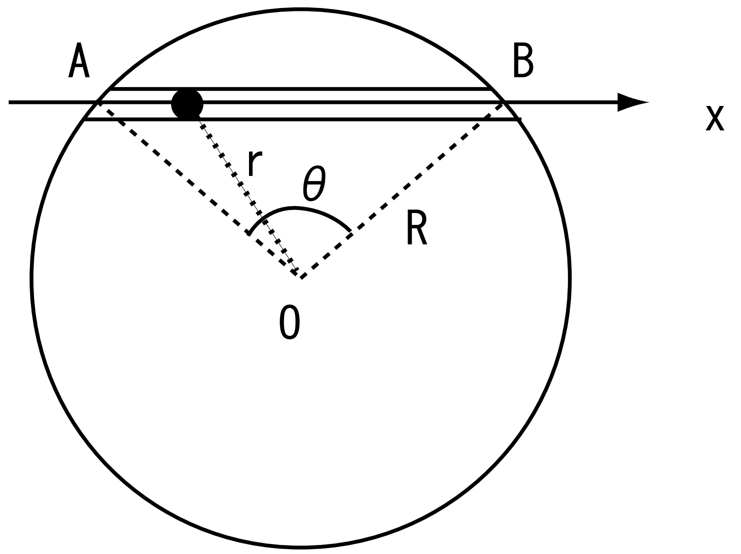
(a) 行列 A の固有値をすべて求めよ。

(b) $\boldsymbol{x_{n+1}} = \mathsf{A}\boldsymbol{x_n}$ の不動点 $\boldsymbol{x}^*$ は、$\boldsymbol{x}^* = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^*$ を満たしている。$\boldsymbol{x}^*$ を求めよ。

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathsf{A}^n$ は収束することが知られている。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathsf{A}^n = (\boldsymbol{x}^*\ \boldsymbol{x}^*\ \boldsymbol{x}^*)$ であることを示せ。なお、ここで、$(\boldsymbol{x}^*\ \boldsymbol{x}^*\ \boldsymbol{x}^*)$ は各列が列ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ である行列を表す。

問題 5： 選択問題・物理

地球を、回転していない一定の密度 ρ をもつ半径 R の球体であるとする。この地球上のある地点 A から地点 B まで、下図のように地中にまっすぐトンネルが通じているものとする。このトンネルの中における、質量 m をもつ質点および物体の運動について考えたい。



なお、地球内部のある点が地球から受ける万有引力は、この点から地球の中心 O までの半径をもつ球体内の全質量を地球の中心に集中させたときに働く引力と同じであると考えてよい。地点 A および B と中心 O のなす角を θ とする。万有引力定数は G とし、地表面での重力加速度は g とする。トンネルが通じている軸を x 軸とし、トンネルの中心点を x 軸の原点とする。

問 1 トンネル内を移動する質点 (質量は m) の運動に関する次の問に答えよ。なお、質点とトンネルの間には摩擦が働かないものとせよ。

(a) 地球の中心からの距離 r にある質点に対して地球の重心方向へ働く万有引力を求めよ。

(b) x 方向の運動方程式を導け。なお、方程式には R と g を用いること。

(c) 質点を地点 A までもってきて静かに手を離したとき、時間 t 経過した後の質点の位置を R、θ、g を用いて記述せよ。

(d) 質点が地点 A から地点 B まで移動するのに要する時間を求めよ。また、質点が地点 A から B へ移動する間に記録する最大の速さを求めよ。ここで、A から B までの距離は 500 km、地球の半径 R は 6400 km、重力加速度 g は 9 m s^{-2} であるとし、計算には $\sqrt{10}$=3.16 を用いてよい。なお、角度 θ は十分小さいと近似してよいものとする。

問 2 トンネル内を移動する物体 (質量は m) には、速度に比例した摩擦抵抗 (抵抗係数 k) が働くとする。この物体の運動に関する次の問に答えよ。

(a) x 方向の運動方程式を導け。

(b) 物体の挙動は摩擦抵抗の大きさに応じて変化する。摩擦抵抗の大きさに関する条件を求め、摩擦係数が大きい場合と小さい場合とで、物体の挙動の違いについて論ぜよ。

問題6：選択問題・物理

理想気体の内部エネルギーは温度のみに依存し、その状態方程式は以下のボイル・シャルルの法則に従う。

$$PV = nRT$$

ここで、P は圧力、V は体積、n はモル数、R は気体定数、T は温度である。この理想気体のボイル・シャルルの法則は、気体分子運動論の立場から説明できる。以下の問に答えよ。ただし、アボガドロ数を N_A とする。

問 1 理想気体の気体分子 n モルを体積 V の容器にいれた図 1 のような状況で、気体分子と右側の壁（ピストン）との衝突を考える。質量 m の分子が x 方向に v_x の速さでピストンに弾性衝突するとき、1 回の衝突での運動量変化と 1 秒間における総衝突回数を求めよ。ただし、容器の長さは l である。

問 2 **問 1** の結果を用いて、以下の式を導け。

$$PV = \frac{1}{3} n N_A m \langle v^2 \rangle$$

ここで、$\langle\ \rangle$ は平均を表し、v は分子運動の速さである。また、分子運動は等方的である。また、ピストンの断面積は A である。

問 3 同じ温度の気体の場合、気体が水素分子のときは、酸素分子のときと比較して、気体分子の平均の速さ（速さの 2 乗の平均値の平方根）は何倍か。ただし、水素分子の分子量は 2、酸素分子の分子量は 32 とする。

問 4 図 2 のように中央に扉のついた容器の一方に理想気体を入れて、容器全体を断熱材で囲む。この容器の扉を開けて気体をもう一方の真空の部分に自由膨張させる。元の気体の体積は 2 倍になる。このとき、温度はどう変化するか。熱力学第 1 法則に基づいた議論と分子運動論に基づいた議論の両方を行い、答を導け。

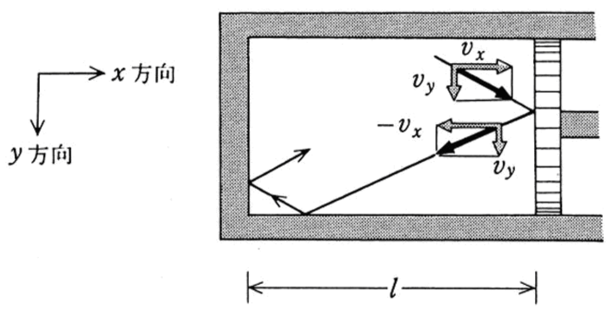


図 1

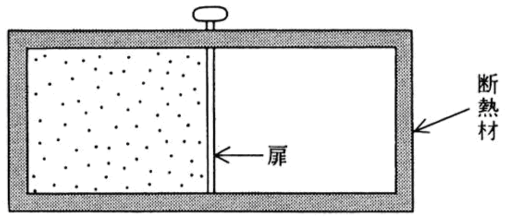


図 2

問題 7： 選択問題・地球物理学

図 1(次ページ) は、気象衛星ひまわりにより観測された 2005 年 8 月 29 日 00 世界標準時の雲分布図である。赤外線放射量から見積もられた輝度温度で表示してある。以下の問に答えよ。

問 1 観測された輝度温度は、特に熱帯域においては、積雲の雲頂の気温と比較的よく対応し、したがって、雲頂高度の推定によく使われる。輝度温度 210 K の積雲の雲頂高度を推定せよ。地表気温を 300 K、湿潤断熱減率を 6 K km^{-1} と仮定せよ。

問 2 高緯度地域 (日本〜シベリアの緯度帯、および、オーストラリア南方・南極海の緯度帯) には、温帯低気圧、特に寒冷前線に伴うと思われる雲の帯が複数見られる。

(a) 寒冷前線と温暖前線の特徴をそれぞれ 50–100 字で述べよ。

(b) 温帯高低気圧の成因と大気大循環における役割を 100 字程度で述べよ。

問 3 日本南方海上の北緯 20 度、東経 135 度付近には、台風 13 号が見られる。また、その東南東、マリアナ諸島近海では、台風 14 号が発生している。

(a) 台風は、図に見られるように、赤道から少し離れた低緯度北太平洋域で発生・発達する。その理由を 100 字程度で述べよ。

(b) 台風に伴う対流圏下層における風の向きを述べよ。また、この風はどのような力のバランスによっているか述べよ。

(c) 北半球を北上する台風に伴い、より強い風を経験するのは、台風の東側にあたる地域か、それとも西側にあたる地域か、理由とともに述べよ。

問 4 図に見られるように、熱帯地域には台風以外にも活発な積雲活動が見られる。熱帯域の積雲活動の特徴について 50 字程度で述べよ。

問 5 日本付近には台風をのぞけば晴天域が広がっている。また、オーストラリア付近にも晴天域が広がっている。このような晴天域の形成理由を、大気大循環の観点から 50 字程度で述べよ。

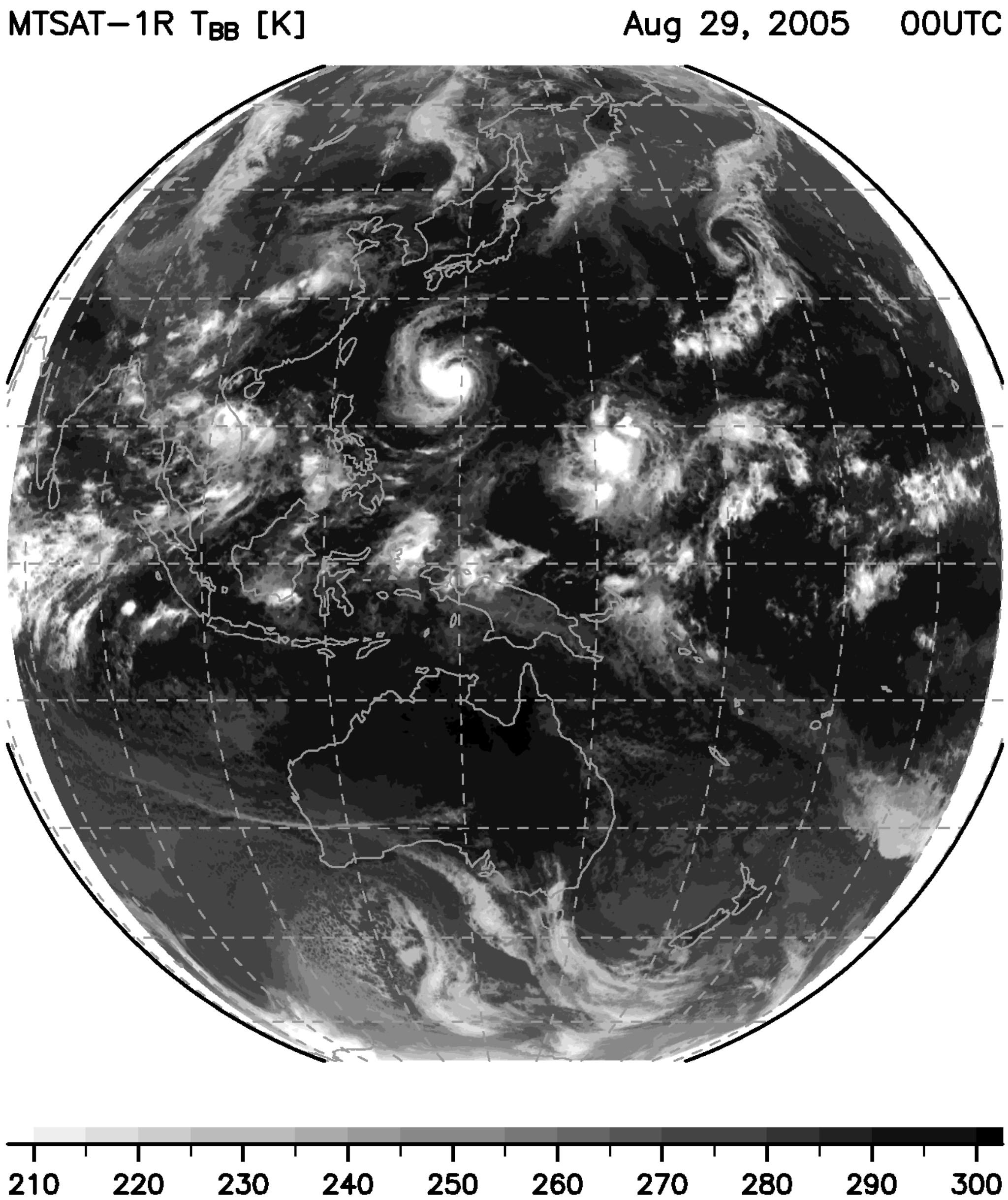


図 1: ひまわり 6 号 (MTSAT-1R) の赤外 IR1 チャンネルによる黒体輝度温度 (black body temperature, T_{BB}) の分布。2005 年 8 月 29 日 00 世界標準時 (09 日本標準時)。

問題8：選択問題・地球物理学

問1 海面変位が図1(a), (b), (c) に示すように分布している。この海面変位がケルビン波に伴うものであるとき、以下の問に答えよ。ただし、ケルビン波に伴う流れは岸沿い方向は地衡流平衡し、沖方向は0としてよい。また、x, y, z はそれぞれ東向き・北向き・鉛直上向きのデカルト座標で、北半球の場合について考える。

(a) 図1(a) の海面変位に伴う地衡流の向きと大きさについて、その東西分布の概略を図に示せ。

(b) 図1(a) の海面変位が、南北方向（y 方向）には図1(b) のように分布している。このとき岸沿い方向の地衡流が図1(b) のどこで収束・発散するか述べよ。図を用いてもよい。

(c) 問1(b) で求めた収束・発散が海面変位の時間変化を引き起こすとすると、図1(b) に示された海面変位がどちらに進むか、およびその理由を簡単に説明せよ。図を用いてもよい。

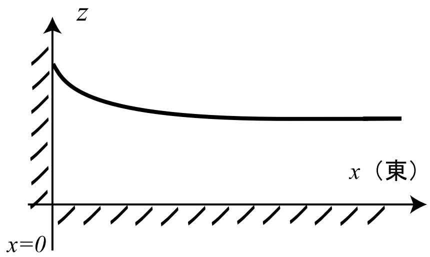


図１(a)：東西鉛直断面
（図１(c)の破線A上）

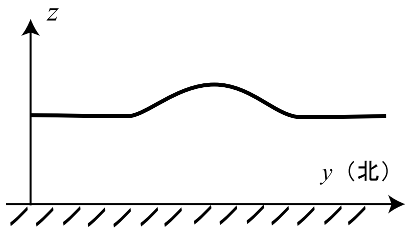


図１(b)：南北鉛直断面
（図１(c)のx=0上（東岸））

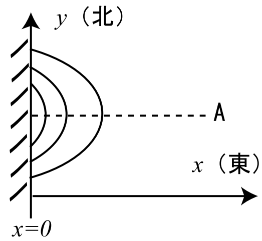


図１(c)：海面変位の水平分布

問2 図2に示すような、水深一定の四角い海を考える。海の広さは図1(c) に示した範囲に比べ十分大きく、コリオリ・パラメタは y 方向に変化する。北半球の場合について以下の問に答えよ。

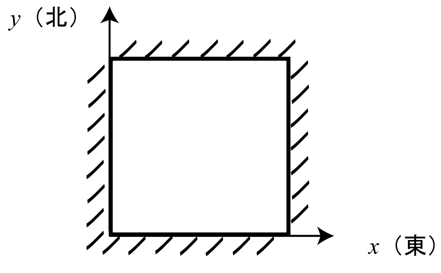


図２：問２の海の模式図
（図１(c)の範囲に比べ十分大きい）

(a) 図2の四角い海の北西の角において生成されたケルビン波の進む経路の概略を進行方向が分かるよう図示せよ。

(b) 図2の四角い海の東岸において生成されたロスビー長波の進む経路の概略を進行方向が分かるよう図示せよ。ただし、考えている波に伴うものを除き、流れはないとする。

(c) 図 2 の四角い海が、最初、海面が平らで静止していた。ある時刻以降に北西の角において海水を供給して海面を持ち上げ続けた結果、ケルビン波が生成され、ケルビン波とロスビー長波による応答が生じたとする。このとき、海面変位の水平分布はどのように時間発展するか。時間発展が分かるように複数の異なる時刻における水平分布を図示し簡潔に説明せよ。

問題9：選択問題・地球物理学

以下の問の中から 2 つ選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) 地球大気および地表面のエネルギー収支は、太陽から受ける短波放射と大気・地表面から宇宙空間へ出す長波放射とでおおまかには決まっている。それぞれの放射に関する過程について、主として関わる大気成分（ガス、粒子）を挙げながら説明せよ。

(2) 異常気象の定義を述べよ。さらに、その原因の一つとされるブロッキング現象について説明せよ。

(3) アジアモンスーンの地理的・季節的特徴とその成因について説明せよ。

(4) 大気や海洋のような密度成層した流体の静的安定性について説明し、不安定時、安定時についてそれぞれ典型的に見られる現象を述べよ。

(5) 内部重力波（海洋では省略して内部波と呼ばれる）とは何か。さらに、それが大気または海洋の大循環に果たす役割を説明せよ。

(6) オホーツク海の海氷（流氷）は、オホーツク海の西部では千島列島に達するほど南へ張り出すのに対し、東部ではそれほど南へ広がらず千島列島に達することはまずない。このことの原因について、考えられる要素を１つ以上挙げて説明せよ。

(7) 親潮について、その位置などの地理的特徴、水塊としての特徴、および成因に注目して説明せよ。