北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成18年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成17年8月

必答問題 I

問 1 次の方程式の解が存在するための条件と、その時の解 (x_1, x_2) を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{1}$$

問 2 以下の問に答えよ。

(a) 次の計算をせよ。

$$\nabla^2 \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \tag{2}$$

(b) 次の微分方程式を解き、$y(x)$ を求めよ。ただし、$y(1) = e$ とする。

$$x\frac{dy}{dx} + 2(1 - x^2)y = 0 \tag{3}$$

(c) z を複素数とするとき、$e^{iz} = 1$ の解をすべて求めよ。

問 3 以下の問に答えよ。

(a) 積分 $G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を、積分

$$G^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{4}$$

を極座標に変換することにより示せ。

(b) 関数 $F(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ は次の性質を満たすことを示せ。

(i) $F(s+1) = sF(s)$

(ii) $F(1) = 1$

(iii) $F(1/2) = \sqrt{\pi}$

必答問題 II

問 1 図 1 のように、中心を O とする半径 a の球の頂点 P から、質量 m の質点が初速度 v_0 で球面に沿って滑り落ちはじめ、点 Q まで達したとする。球面は滑らかで摩擦がないものとする。∠POQ を θ、重力加速度を g とするとき、点 Q における速度 v を g, a, θ, v_0 で表せ。さらに、点 Q において質点が球面から受ける抗力 N を g, a, m, θ, v_0 で表せ。また、質点が球面を離れるとき、 θ が満たす条件を求めよ。

問 2 長さ l の糸の端に質量 m の小さな球をつけた振り子を 2 つ、図 2 のように球が互いに接するように天井から吊るす。一つの振り子を微小角度 θ_0 だけ引いてから静かに手を放したところ、もとの位置でもう一つの振り子に衝突した。重力加速度を g、反発係数を ε とし、$0 < \varepsilon < 1$ であるとき、2 回目に衝突した直後の 2 つの振り子の接線方向の速度をそれぞれ $g, l, \theta_0, \varepsilon$ で表せ。また、その結果に基づいて、十分長い時間が経ったときの振り子の運動はどうなるか簡潔に答えよ。更に、振り子の周期は糸の長さが同じ単振り子の場合に比べてどうなるか、力学的エネルギーは初期状態に比べてどう変化したかを述べよ。ただし、運動はすべて同一の鉛直面内でおきるものとする。

問 3 温度 T_1 で質量が m の液体を、温度が T_2 で質量が m の同じ種類の液体と混合する。熱力学平衡に達するまでのエントロピーの変化を求め、それが正であることを示せ。ただし、系の外との熱のやり取りはないものとする。また、必要ならば定圧比熱 C_p、定積比熱 C_v (ともに定数とする) を用いてもよい。

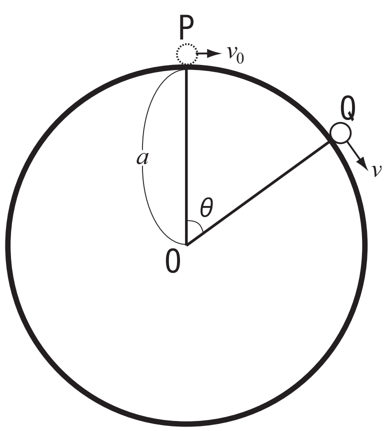


図 1

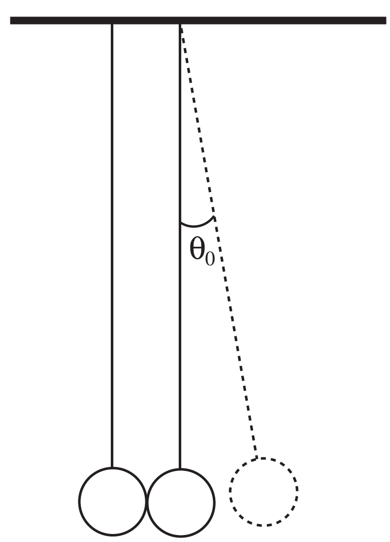


図 2

選択問題：数学・問題 I

曲面上のある点 P の位置ベクトル $\vec{r}$ は、二つのパラメータ u, v を用いて

$$\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \tag{1}$$

と表すことができる。ここで $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである。曲面上において u のみを点 P から du 変化させたときの点を Q とすると、点 P と点 Q を結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \right) du \tag{2}$$

で与えられる。同様に v のみを dv 変化させた点を R とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ である。このとき、以下の問に答えよ。

問 1 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が張る平行四辺形の面積要素 $dS = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ は

$$dS = (EG - F^2)^{1/2} du dv \tag{3}$$

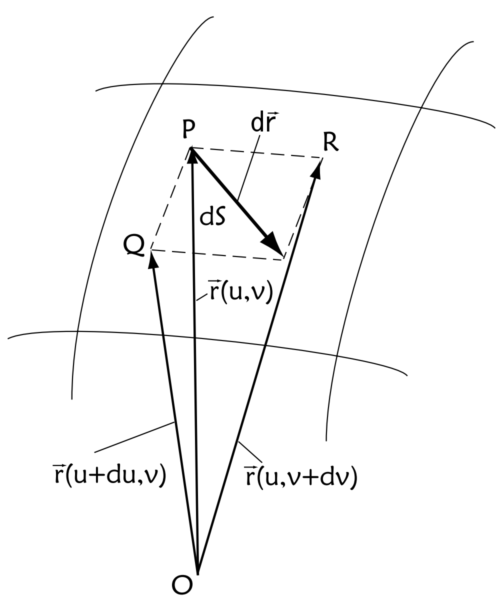
となることを示せ。ここで、

$$E = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2, \quad G = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2, \quad F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

である。また曲面に対する単位法線ベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) / (EG - F^2)^{1/2} \tag{4}$$

となることを説明せよ。



問 2 曲面上の点 (x, y, z) が u, v によって以下のように表されているとする。

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos u$$

このとき、x, y, z 間の関係式を求め、それがどのような曲面を表すかを述べよ。ここで、$0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ である。また、a, b, c を正の定数とする。

問 3 問 2 の図形で $a = b = c$ とした場合の面積要素 dS を、u, v の関数として求めよ。また、単位法線ベクトルを求めよ。

問 4 問 3 の図形の表面積を求めよ。

選択問題：数学・問題II

連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = -k^2x + hy + k^2 \tag{2}$$

に関して、以下の問に答えよ。

問 1 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & h \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ。

問 2 $dx/dt = 0,\ d^2x/dt^2 = 0$ の時の解 (x_0, y_0) を求めよ。また、(x_0, y_0) から少しずれた点を初期値とする解は (x_0, y_0) に近付いていくか、遠ざかっていくか、場合分けして答えよ。ただし、$k \neq 0$ とする。

問 3 $h = 0,\ k \neq 0$ において解 (x, y) を表す式を求め、$x - y$ 平面上にその軌跡を、進行方向も含めて図示せよ。ただし、$t = 0$ において $x = 2,\ y = 0$ とする。

問 4 $h < 0,\ k \neq 0$ における解の振る舞いについて論じ、解の軌跡の概要を $x - y$ 平面上に図示せよ。ただし、$t = 0$ において $x = 2,\ y = 0$ とする。

選択問題：物理・問題I

下図のように、地面 (水平面) との角度が α であるような斜面上に、質量が m、 半径が r、長さが h の密度一様な円柱が置かれている。この円柱の運動に関して以下の問に答えよ。ただし、円柱と斜面の間の静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を ν とし、重力加速度は g とする。

問 1 円柱の中心を通る長さ方向の軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。

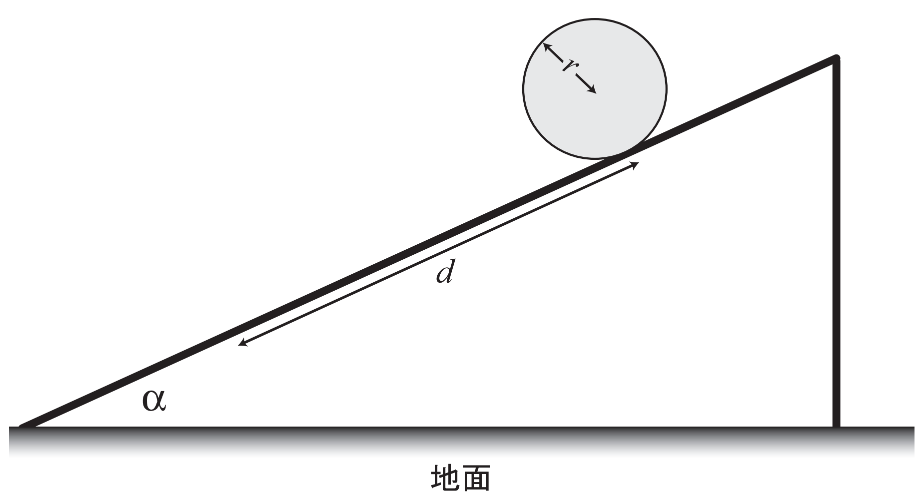
問 2 α がある臨界角 α_c よりも小さければ、円柱は斜面上をすべらずに転がり落ちる。臨界角 α_c を問題文で定義された記号を用いて表せ。

問 3 $\alpha < \alpha_c$ である場合に、転がり落ちる円柱の運動を、摩擦のない斜面を滑り落ちる同じ質量の質点の運動と比較する。

(a) 下図のように円柱が距離 d を移動したときの円柱の重心の斜面に沿った落下速度 v_a は、同じ時間だけ運動したときの質点の落下速度 v_b よりも小さい。これは何故か、文章で簡潔に答えよ。

(b) v_a と v_b の比を求めよ。

問 4 斜面の角度 α を $0 < \alpha \leq \pi/2$ の範囲で変えるとき、任意の α に対して、地面に到達した円柱のもつ力学的エネルギーがどうなるかを定性的に議論し、横軸に α をとって図示せよ。フリーハンドで構わない。ただし、初期に置かれた円柱のもつ力学的エネルギーを E_0 (=一定) とし、図中に E_0 および α_c を示すこと。



選択問題：物理・問題II

ポテンシャル U が 2 次元極座標で $U(r,\theta) = -\dfrac{k^2}{r^2}$ (k は正の定数) と表される場を単位質量の質点Pが運動している。時間微分を上付きの点で表し、$t=0$ において $(r,\theta)=(1,0)$ かつ $(\dot{r}, r\dot{\theta}) = (k,k)$ とする。以下の問に答えよ。

問 1 2次元極座標における動径方向と方位角方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ とについて、それぞれの時間微分は $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ と表される。位置ベクトル $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ で表される点の加速度を $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ とするとき、上記の微分公式を利用して、a_r と a_θ を、それぞれ r と θ の式で表せ。

問 2 質点 P の満たす運動方程式を成分ごとに示せ。

問 3 運動方程式の方位角成分の式と初期条件とから角運動量の値を求めよ。

問 4 力学的エネルギーの保存式を r と θ を用いた式として具体的に書け。

問 5 問 3、問 4 で得られた式を組み合わせることにより、$r-\theta$ 平面上で質点Pの軌跡を記述する微分方程式を導き、それを解いて質点Pの軌跡を求めよ。

選択問題：地球物理学・問題I

発達中の温帯低気圧（次ページ図１）は、二種類の傾斜した不連続面、すなわち、寒冷前線（面）と温暖前線（面）を伴う。これら前線の近傍において、水平風の前線に沿う方向の成分および気温は不連続であるが、水平風の前線面に直交する方向の成分および気圧は連続となっている。以下の問に答えよ。なお、北半球を想定する。

問 1 寒冷前線付近と温暖前線付近の天気の特徴をそれぞれ 20〜40 字程度で述べよ。

問 2 図 1 は発達中の低気圧を示す地上天気図である。風はどのように吹いているか、解答用紙に図 1 をおおまかに写した上で、主要点（特に前線近傍）における風向を矢印で図示せよ。さらに、そのようになる理由を簡潔に述べよ（図を描いて説明してもよい）。また、地衡風近似がよく成り立っている場合にはどうなるか、同様にして示せ。

問 3 次ページ図 2 は各前線面の鉛直断面図である。ここで、x 軸は図に示すように地上における前線に直交する方向に取り、寒冷前線の場合は南南東向きを、温暖前線の場合は北東向きを正とする。地衡風平衡が成り立つとして、前線面の傾斜角 α を簡単に見積もってみることにしよう。

(a) 図 2 における v_1 および v_2 は、水平風の前線に沿う方向の成分である。紙面に向かう方向を正とする。寒冷前線、温暖前線それぞれについて、v_1 と v_2 の向き（符号）を述べよ。

(b) 静力学平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{1}$$

と地衡風平衡の式

$$fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

がよく成り立つと仮定する。図 2 に示す気温 T_1, T_2 などを用い、気圧が前線において連続であることに注意すると、

$$\tan\alpha = \frac{f(v_1 T_2 - v_2 T_1)}{g(T_2 - T_1)} \tag{3}$$

の関係式が成り立つ。これを示せ。その際、図 2 (右) を参考にし、

$$\tan\alpha = \frac{\delta z}{\delta x} \tag{4}$$

の関係を利用せよ。δx と δz それぞれの向きに注意せよ。なお、p は気圧、ρ は密度、g は重力加速度、f はコリオリパラメターを表す。また、理想気体の状態方程式は、R を乾燥空気の気体定数として、$p = \rho RT$ である。

問 4 温暖前線面近傍において、v_1 と v_2 の典型的な差が 10 m s^{-1}、T_1 と T_2 の典型的な大きさが 300 K、それらの差が 3 K の時、式 (3) により tan α を有効数字一桁で示せ。この結果より、水平方向にどの程度の距離離れれば、前線面の高度が 1 km 変わると言えるか。なお、重力加速度は 10 m s^{-1} とし、コリオリパラメターは北緯 45 度の値 1×10^{-4} s^{-1} を用いよ。

問 5 温帯低気圧は移動性高気圧と対をなしているが、移動性高気圧には前線面すなわち傾斜した不連続面は存在しない。その理由を論ぜよ。例えば、図 2 において、前線面近傍の空気塊に働くコリオリ力 fv の向きに着目し、傾斜した不連続面が安定して維持されうるかどうか調べてみよ。

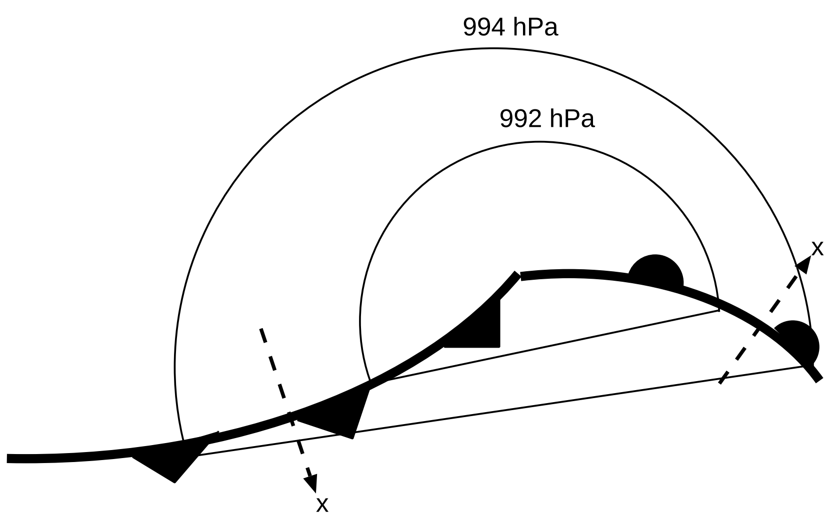


図 1. 発達中の低気圧を示す地上天気図。図中の 2 本の x 軸（点線）は図 2 の x 軸に対応する。

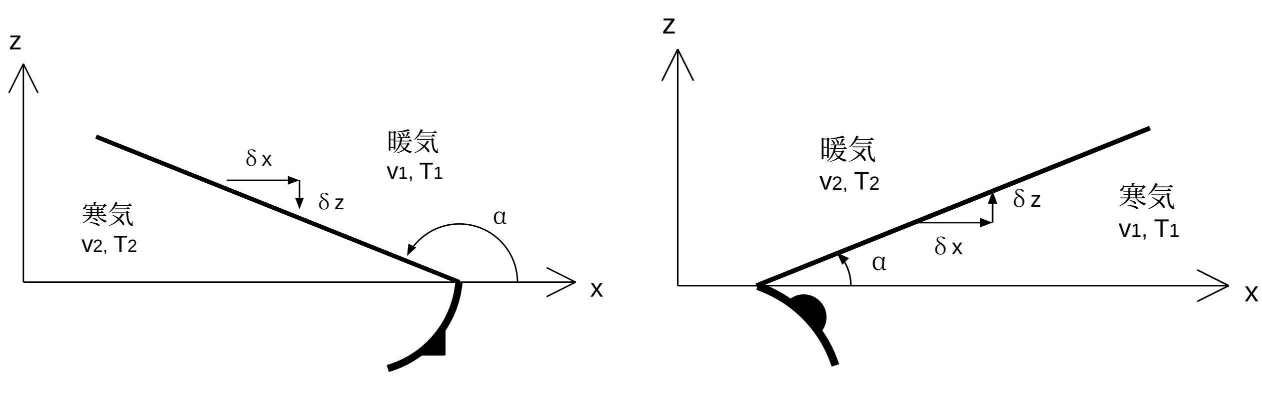


図 2. 寒冷前線（面）と温暖前線（面）の鉛直断面図。x 軸は地上における前線に直交する方向に取り、寒冷前線の場合は南南東向きを、温暖前線の場合は北東向きを正とする。

選択問題：地球物理学・問題 II

海洋の風成循環に関する以下の問に答えよ。ただし以下では、北半球における、密度が一様で海底が平坦な海を考える。また、β 平面近似が成り立つとする。x 軸を東向きに、y 軸を北向きに、z 軸を鉛直上向きにとる。

問 1 風応力は東西成分 τ_x のみであり、次ページ図 1 のような南北分布を持ち、東西方向に一様であるとする。

- **(a)** このような風応力に伴うエクマン輸送の概略を図示せよ。
- **(b)** 上で求めたエクマン輸送に伴うエクマン・パンピング w_e の向きとその分布を図示せよ。

問 2 内部領域ではスベルドラップの渦度バランス

$$\beta v = f\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1}$$

が成り立っているとする。ここで、$f = f_0 + \beta y$ は惑星渦度 (f_0 と β は定数)、v, w はそれぞれ南北流速および鉛直流速を表す。

- **(a)** 式 (1) における各項の物理的な意味を述べよ。
- **(b)** 式 (1) より、南北流速の鉛直積分値 V を求めよ。なお、水深は H とし、鉛直流速は海面で w_e、海底で 0 としてよい。

問 3 次ページ図 2 のような四角い海において、スベルドラップの渦度バランスを満たす流れを考える。

- **(a)** 東西流速の鉛直積分値を U とすると、鉛直方向に積分した連続の式は

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + w_e = 0 \tag{2}$$

  である。この式と問 2 (b) で得られた式より、U を求めよ。ただし、東岸では流れが岸に平行、すなわち $U = 0$ とし、式 (2) の w_e は左辺の他の項に比べ無視できるとする。
- **(b)** 図 1 に示される風応力が存在する場合、スベルドラップの渦度バランスから予想される流れの分布を図示せよ。もし必要なら流量流線関数 ψ ($U = -\partial\psi/\partial y$, $V = \partial\psi/\partial x$) を用いてもよい。

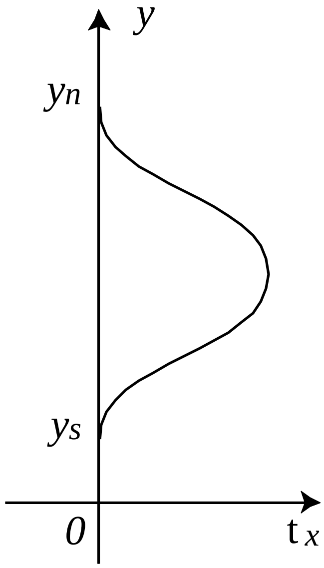


図 1

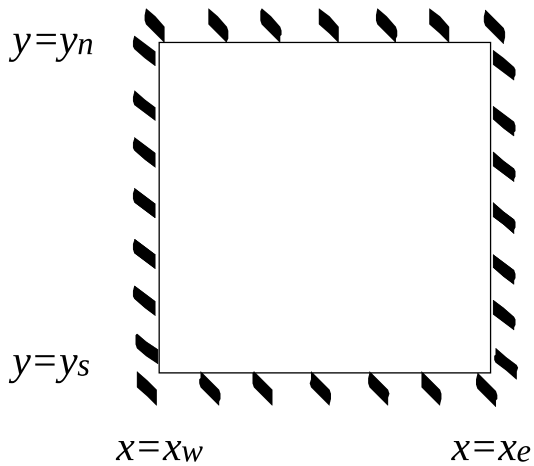


図 2

選択問題：地球物理学・問題 III

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。ただし、式を用いる場合は各記号の意味を示すこと。

(1) エル・ニーニョ、ラ・ニーニャとは、どのような現象であるか記述し、そのメカニズムの概略を説明せよ。

(2) 地球大気中の微量気体成分の中で温室効果を主として担っているものを 3 つ挙げ、それぞれの起源および収支を支配する過程を述べよ。

(3) 強い熱帯低気圧は海域によって異なる名称で呼ばれている。どこでどのように呼ばれるか、3 つ挙げよ。また、発生条件として重要なものを 2 つ挙げ、それぞれ発達にどう関係するか述べよ。

(4) 海洋表層には混合層と呼ばれる層がある。この混合層の特徴について、鉛直構造、季節変化、およびその原因に注目して述べよ。

(5) 海洋における全球熱塩循環について、その駆動力、特徴的な構造、および気候形成・変動に対する役割を説明せよ。

(6) 渦位（ポテンシャル渦度）の典型的な定義の一つを示せ。また、渦位あるいは渦位勾配が重要視される理由を 2 つ挙げよ。