北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成17年度大学院修士課程入学試験問題

# 専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計4問出題されている。その全てに解答すること。解答用紙には問題番号を記入すること。

平成17年3月

# 専門・問題 I

**問 1** 次の微分と積分を求めよ。

**(a)** $\dfrac{d}{dx}(\arccos x)$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**問 2** 下図のような座標系において、半径 $a$ の球を考える。球の中心を原点 $O$ とする。$x-y$ 平面内における $x$ 軸からの角度が $\lambda$ であり、$z$ 軸からの角度が $\phi$ である球面上の地点 A に向かうベクトルを $\vec{r}_A$ として、以下の問に答えよ.

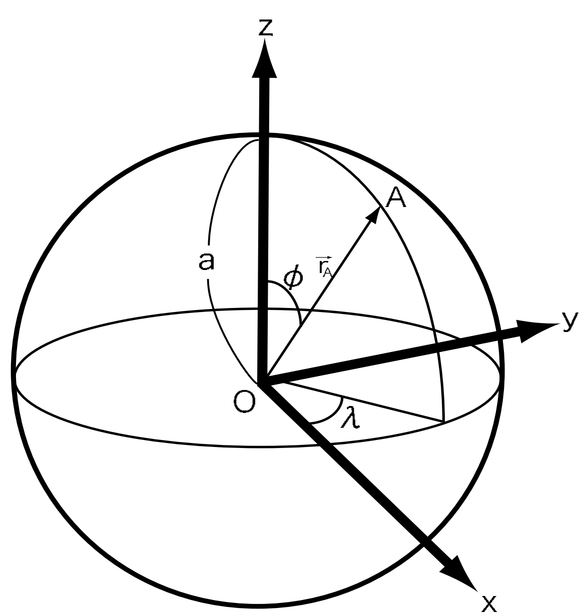
**(a)** $\vec{r}_A$ の $(x, y, z)$ 成分を、$a$, $\lambda$, $\phi$ を用いて表せ。

**(b)** 地点 A の近傍の球面上の点に向かうベクトル $\vec{r}_A + d\vec{r}_A$ と $\vec{r}_A$ との差は

$$d\vec{r}_A = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \phi} d\phi$$

と書ける。$d\vec{r}_A$ の $(x, y, z)$ 成分を $a$, $\lambda$, $\phi$ を用いて表せ。

**(c)** $\dfrac{\partial \vec{r}_A}{\partial \lambda} \times \dfrac{\partial \vec{r}_A}{\partial \phi}$ の $(x, y, z)$ 成分を、$a$, $\lambda$, $\phi$ を用いて表せ。




**問 3** 行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

# 専門・問題 II

パラシュートを用いたスカイダイビングについて、簡略化して考えてみよう。地上から高さ $H$ の地点より初速度ゼロで自由落下を始め、地上からの高さが $h$ となる地点まで落ちたところでパラシュートを開くものとする。このパラシュートは、速度および質量に比例した抵抗力を得られるものとし、その比例係数を $k$ とする。また、パラシュートを開いていない場合は、空気抵抗は全く働かないと仮定する。重力加速度を $g$ として、以下の問に答えよ。

**問 1** パラシュートを開く前の運動方程式を書き下し、落下開始からパラシュートを開くまでの時間、および、パラシュートを開く直前の落下速度 $v_0$ を $g$, $H$, $h$ などを用いて表せ。

**問 2** $H = 5$ km より落下を開始し、パラシュートを開かずに地上に到達する場合の、時間および着地直前の速度を求めよ。ただし、重力加速度 $g$ は $9\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ とせよ。

**問 3** パラシュートを開いた後の運動方程式を書き下し、速度と位置を時間の関数として $g$、$k$、$h$ などを用いて表せ。パラシュートを開いた時の時刻を $t = 0$, その時の速度を $v_0$ とせよ。

**問 4** パラシュートを開いた後、十分な時間があれば、速度はほぼ一定となる。この速度を $k$ などを用いて表せ。実際のスカイダイビングでの着地時の速度はおよそ毎時 30 km である。この値を用いて係数 $k$ を有効数字一桁で求めよ。

**問 5** $H = 5$ km より落下を開始し、$h = 2$ km でパラシュートを開くことにする。降下を開始してからパラシュートを開くまでの時間とパラシュートを開いてから着地までの時間はそれぞれどの程度か。有効数字一桁で求めよ。なお、問 4 における「十分な時間」とはどの程度なのかに注意してみよ（自然対数の底 $e$ はおおよそ 3 である）。

# 専門・問題 III

常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = r(x) \tag{1}$$

を $x > x_0$ の領域で解くことを考える。ここで、$k$ は実定数であるとする。

**問 1** (1) 式の右辺 $r(x)$ がゼロの時の基本解 (一次的に独立な解の組)、$y_1$, $y_2$, を求めよ。

**問 2** $r(x) \neq 0$ の時の (1) の解を

$$y_1(x)\frac{dc_1}{dx} + y_2(x)\frac{dc_2}{dx} = 0$$

を満たす、 $c_1(x), c_2(x)$ を用いて、

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{2}$$

と置いた。$dc_1/dx$, $dc_2/dx$ それぞれを、 $r$ と $y_1$, $y_2$ などを用いて表せ。

**問 3** 問 2 によって得られた $c_1$, $c_2$ に関する式を解くことにより、(1) の一般解が

$$y = A_1y_1 + A_2y_2 - \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} r(\xi)\sin k(\xi - x)d\xi \tag{3}$$

と書けることを示せ。ここで、 $A_1$, $A_2$ は定数である。

**問 4** (1) 式における $r(x)$ として以下のものを考える。

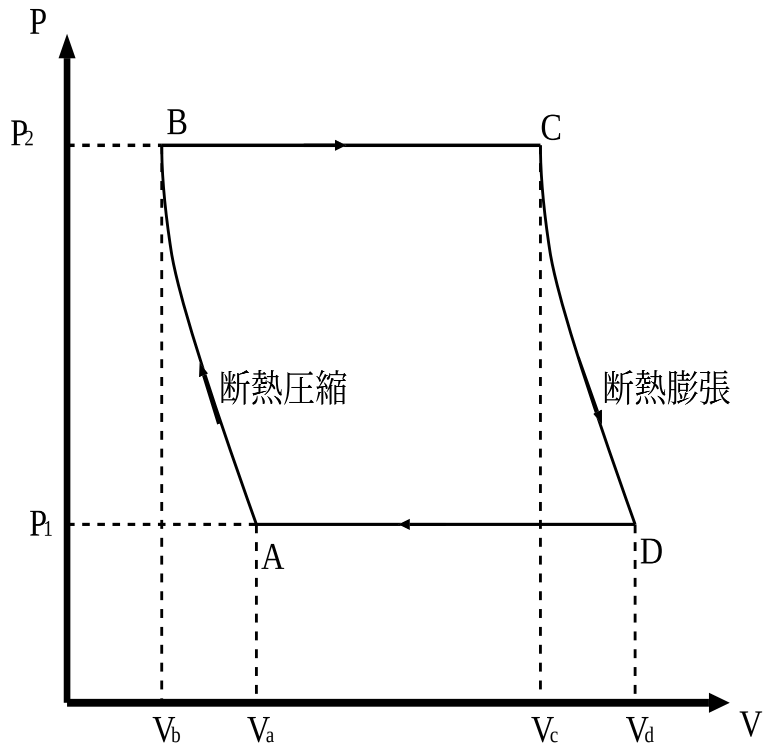
$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x_0 < x < 0, \\ \sin x & \text{for} \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

$k \neq 1$ として、$y(x_0) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$ の条件の下で (1) 式の解を求めよ。

また、$k = 1$ の場合の解も求めよ。

# 専門・問題 IV

1 モルの理想気体が図のような準静的サイクルを行うものとする。




過程 1　A(温度 $T_a$, 体積 $V_a$) $\rightarrow$ B(温度 $T_b$, 体積 $V_b$)　断熱圧縮
過程 2　B(温度 $T_b$, 体積 $V_b$) $\rightarrow$ C(温度 $T_c$, 体積 $V_c$)　圧力 $p_2$ 一定のまま加熱
過程 3　C(温度 $T_c$, 体積 $V_c$) $\rightarrow$ D(温度 $T_d$, 体積 $V_d$)　断熱膨張
過程 4　D(温度 $T_d$, 体積 $V_d$) $\rightarrow$ A(温度 $T_a$, 体積 $V_a$)　圧力 $p_1$ 一定のまま冷却

ここで、$T, V, p$ は気体の温度、体積、圧力であるとし、$C_v, C_p$ はそれぞれ気体の定積熱容量、定圧熱容量であるとする。

**問 1**　熱力学の第一法則により、理想気体の断熱過程においては $C_v dT + pdV = 0$ が成り立つことを示せ。

**問 2**　断熱過程においては $TV^{\gamma-1} =$ 一定　$(\gamma = \frac{C_p}{C_v})$ が成り立つことを示せ。ここで $C_v$, $C_p$ は温度によらず一定であるものとする。

**問 3**　過程 1 および過程 2 において、気体が外からなされる仕事、外から受ける熱をそれぞれ求めよ。

**問 4**　このサイクルの効率を求めよ。