北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成14年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題 2 問は必ず解答すること．選択問題は，数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問，計 7 問出題されている．その中から 2 問を選択し，解答すること．解答用紙には科目名と問題番号を記入すること．

平成 13 年 8 月

必答問題 I

問 1 以下のものを求めよ。

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sin ax \cos bx \; dx$ ここで、a と b は定数

(b) $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-(t-\tau)^2} d\tau$

問 2 関数 $\phi(x,y,z)$ と $\psi(x,y)$ を用いて、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi + \boldsymbol{k} \times \nabla\psi$ で与えられるベクトル $\boldsymbol{v}$ を考える。ここで、$\boldsymbol{k}$は z 方向の単位ベクトルである。以下のものを ϕ と ψ と ∇ を用いて簡単な形で表せ。

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$

(b) $\boldsymbol{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})$

問 3 行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

必答問題 II

問 1 サイコロを n 回振った時の以下の確率を求めよ。

(a) 全く 1 の目が出ない確率

(b) 少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率

(c) 1 の目が 1 回だけ出る確率

問 2 以下の問いに答えよ。

(a) x 軸に沿って水平に運動することができる質量 m の質点を考える。この質点には速度に比例する抵抗 (抵抗係数 r) が働いているとする。運動方程式を立てよ。初速度 V_0 が与えられたとき、この物体は最大どれだけの距離進むことが可能か? 方程式を解いて示せ。

(b) x 軸に沿って水平に運動することができる質量 m の質点を考える。この質点には $k(2x-3x^2)$ という力が働いている。ここで、$k>0$ とする。この力のポテンシャルを求め、横軸に x を取り、図示せよ。さらに、質点の初期位置による運動の仕方の違いについて定性的に述べよ。ただし、初期速度はゼロとする。

(c) 2 つの球形の玉、A と B、を考える。両方とも、大きさと重さは同じである。しかし、A は中が空洞で、B は中まで均質な材料で作られていた。転がって斜面を下るときの A と B の速度は同じか? それとも違いがあるか? 物理的に考察せよ。

選択問題：数学・問題 I

$\psi(x,t)$ に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

を境界条件:

$$\psi(0,t) = \psi(1,t) = 0 \tag{2}$$

と初期条件:

$$\psi(x,0) = C(x) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

の下で解くことを考える。ただし、ν は定数であり、$C(0) = C(1) = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(a) $\psi(x,t) = A(x)B(t)$ と置いたとき、$A(x)$ と $B(t)$ それぞれに関する方程式が

$$\frac{d^2}{dx^2}A + \lambda^2 A = 0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}B + \nu^2\lambda^2 B = 0,$$

と書けることを示せ。ここで、λ は定数である。

(b) A が境界条件

$$A(0) = A(1) = 0$$

を満足するためには λ はどういう値を取らねばならないか。

(c) $C(x)$ が

$$C(x) = a \sin \pi x, \qquad a \text{ は定数}$$

のときの $\psi(x,t)$ を求めよ。

(d) $C(x)$ が一般的な形の場合の $\psi(x,t)$ を求め、級数の形で表せ。

選択問題：数学・問題 II

定積分を求めるのに複素関数を用いることがしばしばある。以下の問いに答えよ。なお、$z = x + iy$ (x, y は実数) で、a は正の実定数、n は整数である。

(a) $z = 0$ を取り囲む閉曲線 C に沿って反時計回りに一回りする積分

$$\int_C z^n dz$$

は $n = -1$ では $2\pi i$、それ以外ではゼロになることを示せ。

(b) 関数

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + a^4}$$

の特異点を求めよ。

(c) 上の結果を用いて、積分、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx$$

を計算せよ。

選択問題：物理・問題 I

ガソリンエンジンでは少量のガソリンを混ぜた空気を、可動ピストンで閉じこめられたシリンダーの中に導入する。このガスの量は n モルで、その気体定数を R として、図 1 に示される $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{D} \to \mathrm{A}$ の 4 段階のサイクル（オットーサイクル）を行うものとする。それらの過程で起こることは次の通りである。

A→B：混合ガスの断熱圧縮。

B→C：爆発により（ほとんど体積が一定のまま急激に）圧力が急増する。

C→D：断熱膨張でピストンが強い力で押され、大きな仕事をする。

D→A：体積一定のままで冷却する。

ここで、$\mathrm{B} \to \mathrm{C}$, $\mathrm{D} \to \mathrm{A}$ では温度は一定でないから、温度の異なる連続無限個の熱源とつぎつぎに接触していると考えることにし、さらにサイクル全体ではボイル・シャルルの法則が成り立つとする。このとき、$\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ で吸収する熱量を Q_1, $\mathrm{D} \to \mathrm{A}$ で放出する熱量を Q_2 としたとき、効率 η は $\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1$ で与えられる。A, B, C, D の各点における温度、圧力をそれぞれ, $T_A, T_B, T_C, T_D, p_A, p_B, p_C, p_D$ とし、$\mathrm{D} \to \mathrm{A}$ と $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ における体積を V_1 と V_2 とする（図 1 参照）。定圧比熱を C_p、定積比熱を C_v とし、その比を $\gamma = C_p/C_v$ としたとき、断熱変化では $pV^\gamma = const.$ が成り立つ。次の (1) 〜 (4) の設問の答えを V_1 と V_2 あるいはそのいずれかを含む形で答えよ。また (5) は設問の指示に従って答えよ。

(1) A→B で外から受けとる仕事はいくらか。

(2) B→C で外から吸収する熱量を示せ。

(3) C→D で外へする仕事はいくらか。

(4) D→A で外へ放出する熱量を示せ。

(5) このサイクルの効率を V_1, V_2, γ を用いて表せ。

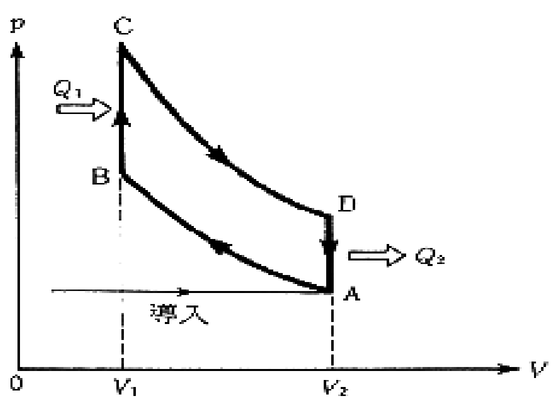


図 1

選択問題：物理・問題 II

真空中で重力の加速度を g とするとき、初速 v で水平に放出された質量 m の微小な球が落差 H だけ下にある摩擦がなく滑らかで固定された水平な面と反発係数 e で跳ね返りながら前進していくとする。この衝突において毎回の跳ね返りにおける最高点の高さがだんだん低くなっていく。なお, 反発係数が e であることは、もし微小球が平面に鉛直に落下して衝突し、鉛直に反発した時、衝突と反発の瞬間における速さの比が $1:e$ であることを意味する。次の設問に答えよ。

(1) 1 回目の衝突点までの水平距離はいくらか。

(2) 1 回目の衝突における衝突と反発の入射角と反射角を平面の法線から測って、それぞれ θ と ϕ とする。それらの関係を示せ。

(3) この 1 回目の衝突で失ったエネルギーはいくらか。

(4) 1 回目から 2 回目の衝突点までの水平距離はいくらか。

(5) $n-1$ 回目から n 回目の衝突点までの水平距離はいくらか。

(6) この跳ね返りの高さが零になる時までの出発点からの水平距離はいくらか。

(7) この跳ね返りが止まるまでに消費したエネルギーはいくらで、それはどこへ行ったか説明しなさい。

（参考）等比級数の和の公式を次に示す。

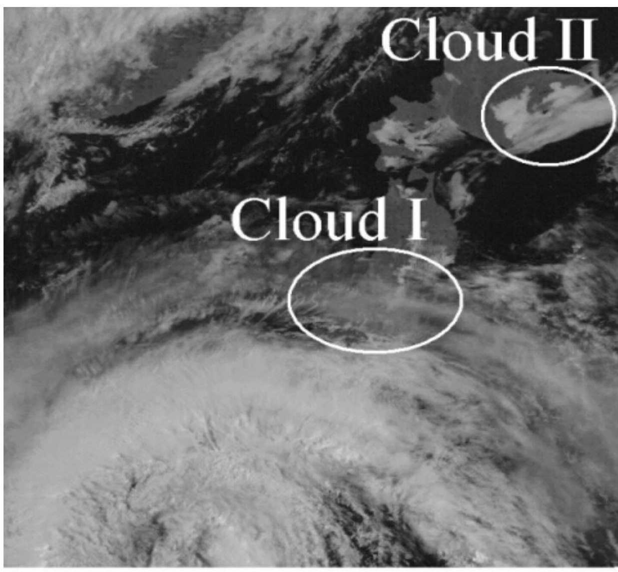
$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad (r \neq 0) \tag{1}$$

選択問題：地球物理学・問題 I

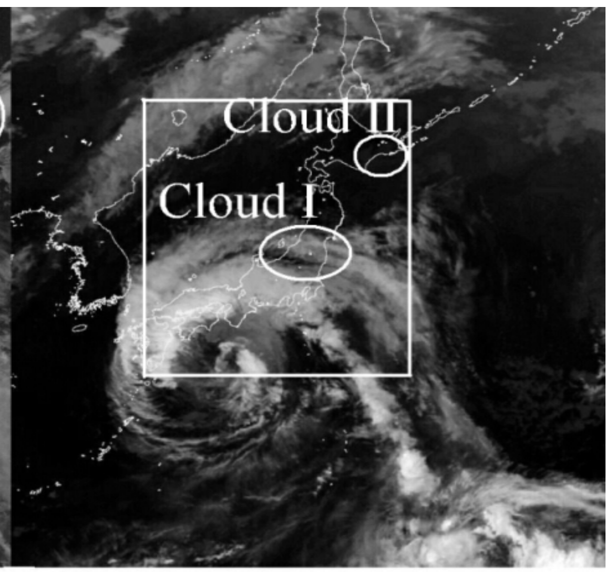
以下の 2 枚の図は、2001 年 8 月 2 1 日朝 9 時の気象衛星「ひまわり」の画像である。図Aは可視画像で、図Bは赤外画像である。また、図B中の太い白線で囲まれた領域は、図Aの画像範囲とほぼ一致する。さらに、図B中の海岸線は、人工的に書き加えられたものである。

問 1　図 A 中に楕円でかこまれた領域に存在する、地形が薄く透けて見える Cloud I と、白く濃く見える Cloud II は、それぞれ通常何と呼ばれているか。また、Cloud I は、図 B にも良く見えているが、Cloud II はほとんど見えていない。その理由を述べよ。

問 2　地球上全体で、Cloud I あるいは Cloud II の雲量が増加した時、それぞれの雲が地球の平均気温にどのような影響を及ぼす可能性があるかを議論せよ。



図A



図B

選択問題：地球物理学・問題 II

下図は、黒潮や湾流などの西岸境界流が流れる海域における水温分布を簡略化して示したものである。なお、各地点の水温は、海岸からの距離と深さによって決まり、図に示された等温線から鉛直方向に線形補間して求めることが出来るものとする。また、深さ 1200m より深いところでは流れがないものとする。

次の式が成り立っているとする。

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \tag{1}$$

$$fv = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\rho = \rho_0 - \alpha T. \tag{3}$$

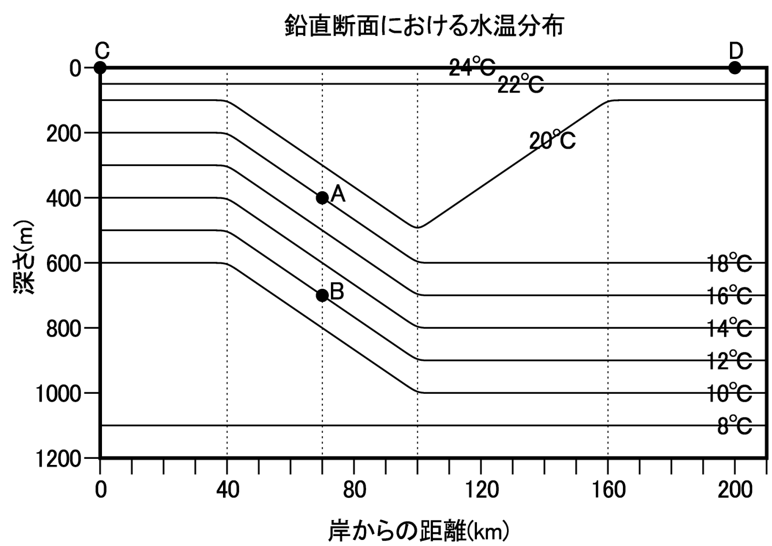
ここで、P は圧力、ρ は密度、$f(=10^{-4}[s^{-1}])$ はコリオリパラメータ、v は岸に沿った流速、$g(=9.8[ms^{-2}])$ は重力加速度、T は水温、x は岸からの距離である。また、$\rho_0 = 1000[kgm^{-3}]$、$\alpha = 0.3[kgm^{-3}K^{-1}]$ とする。

問 1 式 (1) から (3) を使って T と v との関係式を作れ。

問 2 岸から 70km、深さ 400m(図の A) と深さ 700m(図の B) では、どちらがどのくらい流れが速いか求めよ。

問 3 流速について鉛直断面におけるおよその分布を図示せよ。

問 4 岸から 200km 沖 (図の D) の海面水位は、岸 (図の C) に比べてどのくらいか求めよ。



選択問題：地球物理学・問題 III

次の語句から 2 つ選んで、地球物理学的観点から、そのメカニズムを含めて、それぞれ 400〜800 字程度で説明せよ。

- 偏西風
- ハドレー (Hadley) 循環
- ブルーワー・ドブソン (Brewer-Dobson) 循環
- 風成循環
- 主水温躍層
- 中規模渦