

北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座 気候 デリング講座 極域大気海洋学講座

平成10年度大学院修士課程入学試験問題
(2次 飛 級)

専門科目

すべての問題に答えること。

数学・問題 I

極座標 (r, θ) における微分方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1)$$

を $r = 1$ で与えられる境界条件のもとで解くことを考える。

問 1 a, b を定数とすると、微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (2)$$

の解は、 λ が次の 2 次方程式

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0 \quad (3)$$

の根であるとき、

$$y = x^\lambda \quad (4)$$

で与えられることを示せ。また、 λ が等根ならば、

$$y = x^\lambda \log x \quad (5)$$

も解であることを示せ。

問 2 ψ として変数分離形

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (6)$$

を仮定すると、 $r = 0$ で連続な式 (1) の解は、

$$\psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (7)$$

と書けることを示せ。ここで、 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は定数とする。

問 3 式 (7) を利用して、境界条件

$$\psi(1, \theta) = \cos^2 \theta \quad (8)$$

を満たす式 (1) の解 $\psi(r, \theta)$ を求めよ。

数学・問題 II

問 1 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

の固有値及び固有ベクトルを求めよ。さらに、それをもとにして行列 A のべき乗 A^n を示し、 n が無限大の極限を求めよ。ただし、 $0 < a < 1$ とする。

問 2 次の微分積分方程式を解き、 $y(x)$ を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x y(x') \cos(x - x') dx'$$

ただし、 $y(0) = 2$ とする。

物理・問題 I

地球を周回する静止衛星に関する以下の設問に答えよ。ただし、地球は一様な密度をもつ球と仮定し、その半径を R_0 、重力加速度を g 、自転周期を T_0 とする。また、問 3, 問 4 については問 2 で求めた h_0 を既知量として用いてよい。

問 1 上空に静止衛星が存在しうる領域は地球上のどこか。その理由とともに示せ。

問 2 静止衛星の地上からの高度 h_0 を求めよ。

問 3 静止衛星を地球に対して鉛直上向きに突然加速させて地球の引力圏外にもっていくことを考える。このときに最小限必要な鉛直上向きの初速度の大きさを求めよ。

問 4 静止衛星が突然加速し、進行方向への速度の大きさが 10 % 増加したとする。新しい軌道における、地球の中心からの最遠点までの距離を求めよ。また、新しい軌道の概略図を示せ。

物理・問題 II

質量 m 、正の電荷 e をもった小さな粒子が、水平方向に一様な電場 E におかれている。粒子を水平面から角度 θ で斜め上方に初速度 v_0 で打ち出す。ここで θ は電場方向から測った角度とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は無視し、重力加速度を g とする。

問 1 粒子が初期の高さに戻ってくるまでに水平に移動する距離を求めよ。

問 2 問 1 で求めた距離が最大となる角度 θ を求めよ。

問 3 電場が非常に強いとき、問 2 の θ はどのような値に近づくか。物理的説明を加えて求めよ。