北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座　気候　デリング講座　極域大気海洋学講座

平成 9 年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学　物理学　地球物理学　ら各 3 問, 計 9 問出題されている．その中から 4 問選択し，解答すること．解答用紙には科目名と問題番号を記入すること.

数学　問題 I

P, Q 　 x のみの関数であるとき

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{1}$$

を 1 階線形微分方程式という。

問 1 (1) の一般解は、c を任意の定数とすると

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + c\right)$$

で与えられることを示せ。

問 2 次の微分方程式を解け。

$$x\frac{dy}{dx} + (1-x)y = xe^x.$$

問 3 $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n\,(n \neq 0,\, n \neq 1)$ なる微分方程式を Bernoulli の微分方程式という。$z = y^{1-n}$ とおくことによって、これが 1 階線形微分方程式に帰着できることを示せ。

問 4 次の微分方程式を解け。

$$x\frac{dy}{dx} + y + x^2y^2 = 0.$$

数学　問題 II

クトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z^3\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ に関する次の問いに答えよ。ここで、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は、おのおの x 軸、y 軸、z 軸方向の単位ベクトルである。

問 1　$z = 0$ の平面での $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を図示せよ。

問 2　$z = 0$ の平面において原点を中心とする半径 1 の円の領域内で次の積分を求めよ。

$$\int (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{k} dS. \tag{1}$$

問 3　$\nabla \times \boldsymbol{A}, \nabla \times \boldsymbol{B}$ を求めよ。

問 4　$\nabla \cdot \boldsymbol{A}, \nabla \cdot \boldsymbol{B}$ を求めよ。

問 5　原点、$(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ を頂点とする立方体についての体積分

$$\int \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV \tag{2}$$

を求めよ。

問 6　問５の立方体表面での面積分

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{3}$$

を求めよ。ここで $\boldsymbol{n}$ は面に垂直な外へ向かう単位ベクトルとする。

数学　問題 III

複素数に関する次の問題を解け。i は虚数単位とする。

問 1　次の式を示せ。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1}$$

ただし、n は整数、θ は実数とする。

問 2　次の式を満たす複素数 z をそれぞれ求めよ。

(a)　$z^3 = 27$

(b)　$z^2 = i$

(c)　$z = i^i$

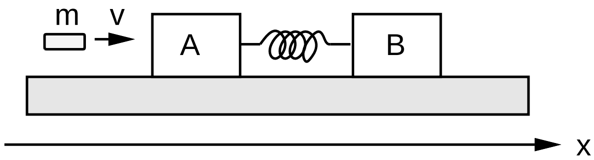
問 3　$z_1,\ z_2$ を $|z_1| \geq |z_2|$ となる複素数であるとする。このとき、

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{2}$$

が成り立つことを証明せよ。

物理　問題 I

質量 M_Aのブロック A と質量 Mのブロック B が弾性係数 kの軽いばねで結ばれ、摩擦のない平面に置かれている。A から B に向かって座標軸 x をとる。x が正の方向に速度 v (> 0) をもつ質量 m の弾丸がブロック A に命中し、瞬時に合体してともに運動する (下図)。簡単のため、$M_A = M - m$ とする。



問 1　ブロック A と B のその後の運動を記述する方程式を導け。ただし、A と B の時刻 t における x 座標上の位置を x_A, x_Bとする。

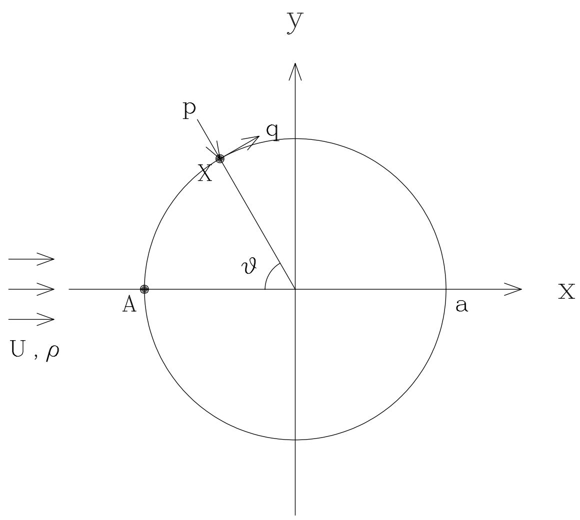
問 2　両ブロックの重心はどのように運動するか。

問 3　問 1 で導いた方程式に基づいて、ブロック B に対するブロック A の相対運動が振動であることを示せ。また、この振動の周期を求めよ。

問 4　ばねは最大どれだけ圧縮されるか。

物理　問題 II

一様な流速Uをもつ理想流体の流れがある。そこに半径aの円柱を下図のようにおく。ただし重力の影響は無視する。流体の密度をρ、点 A における圧力をp_1とする。また流れとのなす角がθである点 X における圧力をp、そこでの表面に沿う流速をqとする。このとき以下の問に答えよ。



問 1　円柱全体にかかる力の、一様な流れに垂直な方向 (y方向) の成分 (揚力 L) は、圧力pがθの関数として表わされるときpを使ってどのように書けるか。

問 2　円柱に時計まわりの循環 Γ^* を与えると、円柱表面上の流速qは次のように表わされる。

$$q = 2U\sin\theta + \frac{\Gamma^*}{2\pi a} \tag{3}$$

このとき圧力pはどのように書けるか。

問 3　問 2 で求めた圧力を問 1 の揚力に関する式に代入して、揚力 L を求めなさい。

物理　問題 III

van der Walls は分子運動論をもとに、実在気体の状態を表す近似方程式として以下の式を導いた。

$$(\underbrace{P+\frac{a}{V^2}}_{\alpha})(V\underbrace{-b}_{\beta})=nRT \tag{4}$$

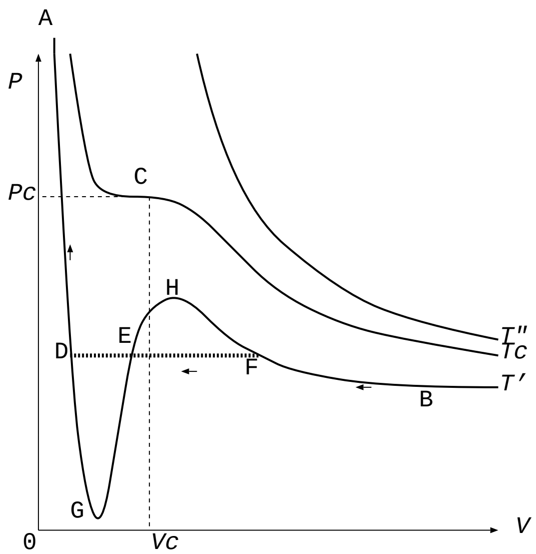
ここで n はモル数、Rは気体定数、a、b は各気体により特有な正の定数である。下の図は温度 $(T' < T_c < T'')$ をパラメーターとして (1) 式に従う圧力 P と体積 V の関係を示したものである。温度が十分高い場合 (T'') は等温線は単調に変化するが、ある温度 T_c より低い温度 (T') では、等温線は極大値と極小値をもつ。

問 1 (1) 式は理想気体の状態方程式に補正を加えたものである。体積Vが十分大きくなると (1) 式は理想気体の場合の式に近づくことを示せ。また van der Walls は気体分子の何を考慮して項α、項βを付け加えたのか、それぞれの項について簡単に述べよ。

問 2 実験では、温度をT'に保ちながら B の状態から気体を圧縮すると F に達するが、その後 Pと Vの関係は (1) 式を満たさなくなる。すなわち、さらに圧縮してゆくと、H−G を経ることなく圧力一定のまま F から D の状態に変化する。圧力一定の F−D 間はどのような状態であるか述べよ。

問 3 温度が高くなるにつれて水平部分 F−D は短くなり、気体によって定まったある温度 T_c (臨界温度) になると D、E、F は 1 点 C (臨界点) に一致する。この温度を超えると、圧縮につれて圧力は単調に増大する。(1) 式が成り立つものとして、C 点での体積 (V_c)、圧力 (P_c)、温度 (T_c) を a、 b、Rを用いて表せ。

問 4 P_c、V_c、T_c を単位にとった圧力 $p = P/P_c$ 、体積 $v = V/V_c$ 、温度 $t = T/T_c$ によって状態方程式 (1) を書き直せ。



地球物理学　問題 I

気候学者のブディコやセラーズは、 地球の気候がどのように決定されているかを調べるため、地球システム全体での放射エネルギー収支を記述する次の式を用いて考察した。

$$C\frac{dT}{dt} = Q_0(1-A) - \sigma T^4 \tag{1}$$

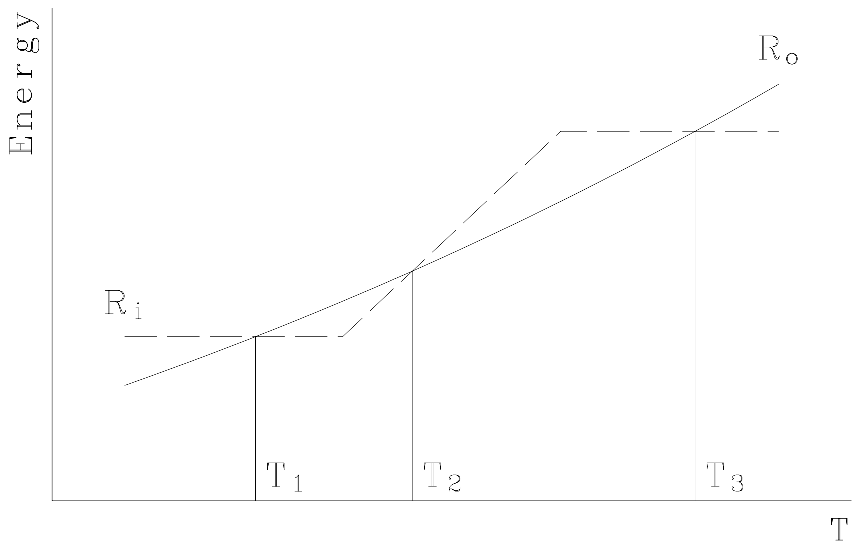
ここで、Tは全球平均した地球の温度、t は時間、Cは地球システムの持つ熱容量、Q_0は大気圏外で単位面積当り地球が受け取る全球平均した太陽放射量 (一定)、σはステファン・ボルツマン定数である。なお、A は $0 \le A \le 1$ の値をとる。 式 (1) は、地球システムが受け取る正味の太陽放射エネルギー量 $R_i = Q_0(1-A)$ と、地球システムから宇宙空間へ射出されるエネルギー量 $R_o = \sigma T^4$の差によって、地球の温度が変化することを意味している。

問 1　太陽定数 Q、地球半径 a を用いて Q_0を表せ。

問 2　地球システムが受け取る正味の太陽放射エネルギー量は Q_0の一部であり、式 (1) では $Q_0(1-A)$ と表現されている。ここで、A は何と呼ばれるか記せ。

問 3　式 (1) で A を定数と考えたとき、Tが時間変化しない定常状態の平衡温度 Tを求めよ。

問 4　彼らは A の T依存性を考慮に入れ、R_i が下図の破線のように変化すると仮定した。この T依存性の根拠としてどのようなことが考えられるか説明せよ。



問 5　上図のような場合、式 (1) では、地球システムがとりうる定常状態は 3 つ (T_1, T_2, T_3) あることが分かる。各々の定常状態は微小な温度擾乱に対し安定か不安定であるかを、上図をもとに定性的に説明せよ。

地球物理学　問題 II

図 1 は太平洋のある 3 つの緯度帯における平均的な T–S ダイアグラム (表層を除く)、図 2 は太平洋の南北断面における水温、塩分、海水密度σ_t、溶存酸素の各分布図である。

問 1　図 1 で **a**, **b**, **c** の T–S ダイアグラムは、それぞれ大体どの緯度のものであるか。それぞれ、下の選択肢から一つずつ選べ。
(1) 70°S　(2) 50°S　(3) 30°S　(4) 5°S　(5) 5°N　(6) 30°N　(7) 55°N

問 2　図 1 で **b** の表層の高温、高塩分の海水、中層の低塩分の海水、深層の低温、高塩分の海水は、どうしてこの様な水温、塩分の特徴を持つようになったか述べよ。

問 3　北太平洋の深度 500~2000m に溶存酸素が非常に小さな層があるが、この様な層ができた原因を海水の循環から説明せよ。

図 1

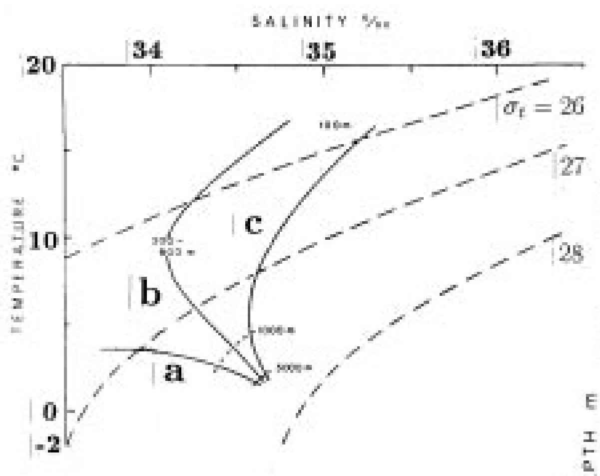
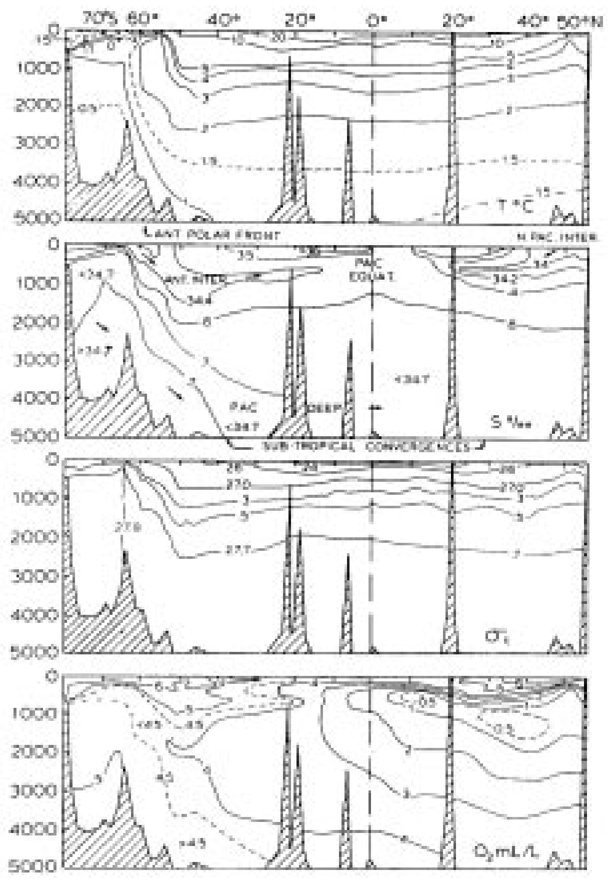


図 2



地球物理学　問題 III

大気や海洋で生じる大規模現象を回転水槽内で再現することを考える。

問 1　大気や海洋では、コリオリパラメータは緯度の関数である。このことが現実の大気や海洋の流れの場の発展に大きく影響する (β効果)。しかし、回転水槽実験でコリオリパラメータに空間分布を持たせることは困難である。そこで、図 1 のような 2 重円筒の水槽え、円筒の中心に近い方が浅く、外側ほど深くすることによって、同様の効果を含めることにした。水は 2 つの円筒に挟まれた領域に入れる。浅い方 (内側) と深い方 (外側) のどちらが高緯度に対応するか。また、その理由を述べよ。

問 2　上で考えた水槽を回転台の上に載せ、反時計回りに回転させる。図中の $0°$ の位置に板を入れて一定の振動数で振動させて波を起こす。振動板の振動数は水槽の回転数に比べて十分に小さいとする。振動させ始めてから数周期後に流速分布を調べ、流線の概略を描くとする。次ページの図 $2(a) \sim (e)$ の内、最も実際に起きそうなのはどれか。また、それを選んだ根拠を述べよ。

図 1

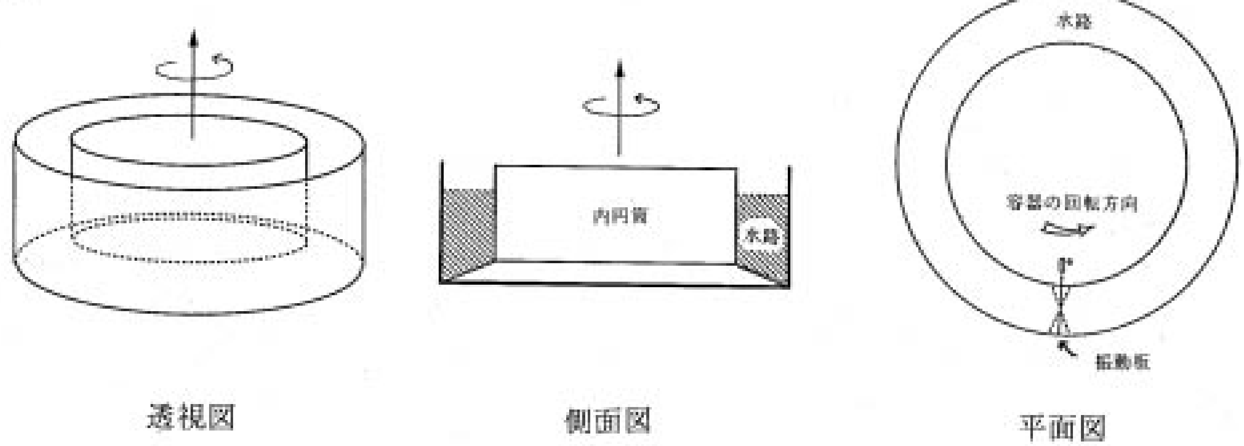


図 2