北海道大学大学院地球環境科学研究科大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座、気候モデリング講座、極域大気海洋学講座

平成６年度　入学試験問題　（専門）

物理 問題 1

[1] 密度一定 ($\rho = \rho_0$) の流体中における重力場中の運動を考える．

(a) 静止状態では，次の静力学平衡の式，

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g, \tag{1}$$

が成立することを，図 1 の流体要素 δV に働く力のバランスより示せ．ここで，g は重力加速度で，p は圧力である．

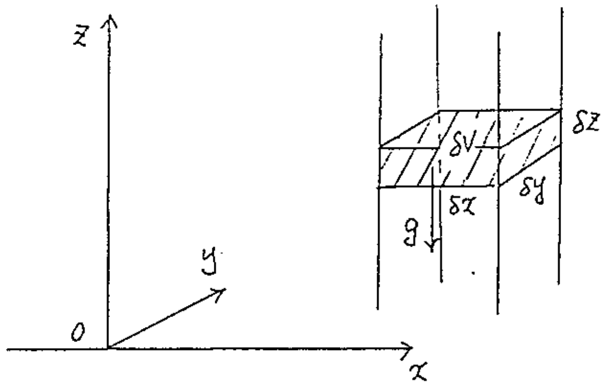


図1

(b) 次に 1 次元の運動を考える (図 2 参照)．静止状態での流体の深さを H (=一定) とし，運動に伴う表面変位を $\eta(x,t)$ とする．さらに，式 (1) が運動流体中でも近似的に成立するという，静力学平衡近似を用いると，高さ z における流体中での圧力は，

$$p(x,z,t) = p_0(z) + \rho_0 g\eta, \qquad p_0(z) = \rho_0 g(H-z) + p_{air} \tag{2}$$

となることを示せ．ここで，p_{air} (=一定とする) は流体表面での大気圧である．

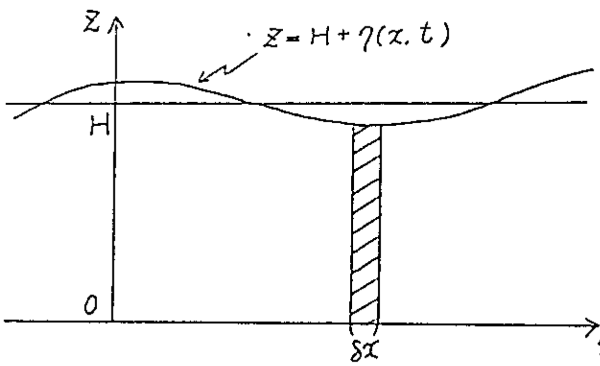


図2

(c) 問 (b) より，x 方向の運動方程式が，

$$\frac{du}{dt} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3}$$

となることを示せ．ここで，u は x 方向の流速を示す．また，流速 u は高さ z に依存しないことを説明せよ．

(d) 図 2 で，幅 δx を持つ "水柱" での質量収支を考えることにより，次の質量保存則：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{(H+\eta)u\right\}, \tag{4}$$

が成立することを示せ．

(e) さらに運動は微小であると考え，式 (3), (4) を線形化することにより，表面変位 η に対する次の 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \qquad c = \sqrt{gH}, \tag{5}$$

を導け．

(f) 式 (5) の一般解は，

$$\eta = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \tag{6}$$

で与えられる．ここで，f_1, f_2 は任意の関数である．では実際に，式 (6) が式 (5) の解であることを示せ．

[2] 図 1 のように, 2 つの全く同じ単振り子をばねで連結したときの微小振動を調べる. 但し, 2 つの振り子の支点の間隔は, ばねの自然の長さに等しく, ばねの質量は無視する. また, 振り子が鉛直と成す角 φ_1 および φ_2 は微小とし, ばねは常に水平になっていると考える.

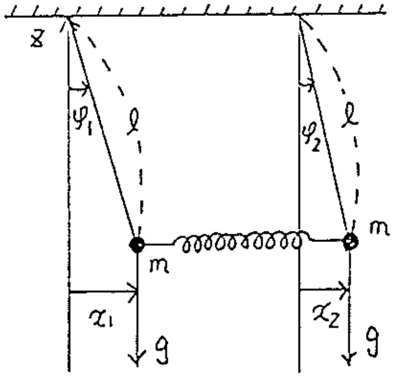


図1

(a) 振り子の長さを l, ばねの弾力定数を c, 振り子の重さを m, 重力を g とするとき, 振り子の位置 x_1, x_2 に関する運動方程式が,

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -mg\frac{x_1}{l} + c(x_2 - x_1), \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -mg\frac{x_2}{l} - c(x_2 - x_1), \tag{2}$$

と書けることを示せ.

(b) 式 (1), (2) で, 振り子間のばねによる相互作用がない場合, 振り子はそれぞれ独立な調和振動を行うはずである. そこで, 試みに,

$$x_1 = \mathrm{Re}\{A_1 \exp(i\omega t)\}, \tag{3}$$

$$x_2 = \mathrm{Re}\{A_2 \exp(i\omega t)\}, \tag{4}$$

とおき, これらが式 (1), (2) を満たすように, A_1, A_2, ω を決定することを考える. 但し, ここで A_1, A_2 は一般に複素数とし, Re { } は中括弧内の実数部を示す. 式 (3), (4) を式 (1), (2) に代入し, 振動数 ω は次の 2 つの値を持つことを示せ.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2c}{m}}. \tag{5}$$

(c) 問 (b) の結果より, x_1, x_2 の一般解を書き下せ (A_2 と A_1 の関係を示すこと).

(d) 初期条件,

$$t = 0 \text{ で} \quad x_1 = a\,(\text{実数}), \quad x_2 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \tag{6}$$

に対する解は,

$$x_1 = a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \tag{7}$$

$$x_2 = -a\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \tag{8}$$

と書ける. この式をもとにして, 2 つの振動数 ω_1 と ω_2 がほぼ等しいときの x_1, x_2 の時間変化の概略を図示せよ.

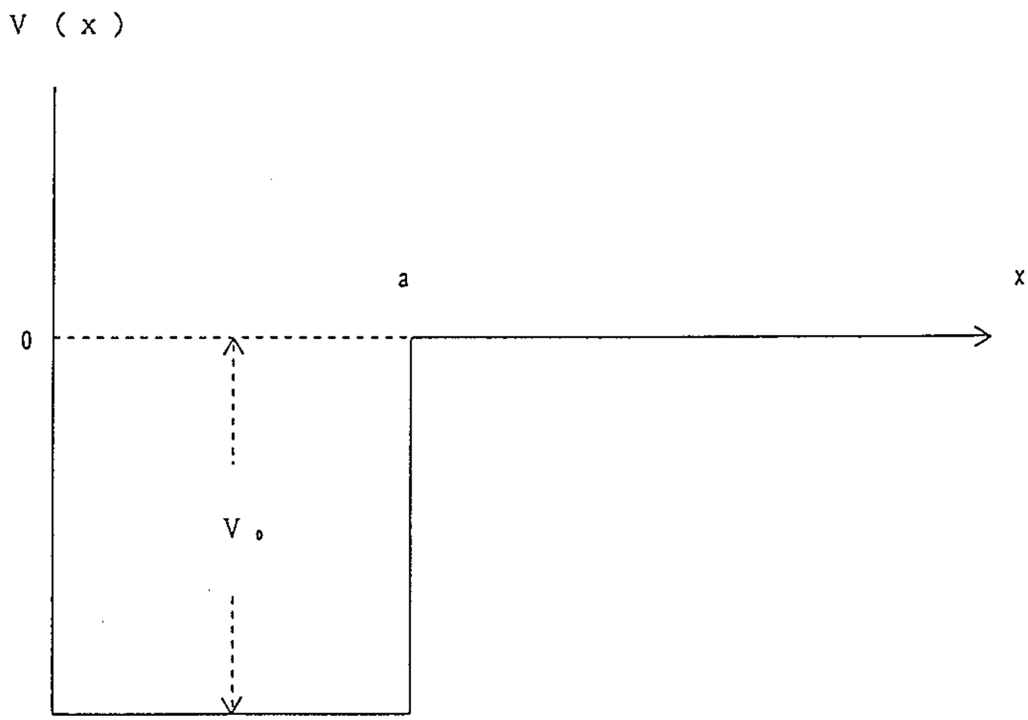
物理 問題3

下の図のような1次元のポテンシャル$V(x)$に束縛されている質量mの粒子を考える。$x=0$では剛体壁、$0<x<a$ではV_0の深さで、$a<x$では0である。

(1) エネルギーをEとし、波動関数Ψの従う方程式を書け。

(2) $E>0$では束縛状態が存在しないことを示せ。

(3) V_0があまり小さいと束縛状態は存在しない。束縛状態が存在するためのV_0の最小値を求めよ。



数学 問題1

次の積分を実行せよ

(i) $$\int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx$$

(ii) $$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

(iii) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x} sin\, x\, dx$$

(iv) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2}\, dx$$

数学 問題 2

$x = x_i$ のとき $y = y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ であるデータセットから、x と y の関係を、最小二乗法により、直線 $y = ax + b$ で近似するとする。いま、符号 $\langle \cdots \rangle$ を用いて平均値を表す（例えば、$\langle y_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$）と、以下の関係式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\langle y_i \rangle &= b + a \langle x_i \rangle \\
\langle x_i y_i \rangle &= b \langle x_i \rangle + a \langle {x_i}^2 \rangle
\end{aligned}
\tag{1}
$$

以下の設問に答えよ。

設問 1

(1) が成り立つことを示せ。

設問 2

(1) より、a, b を x_i, y_i を用いて表せ。

設問 3

ある海上の点での気温 $A(^\circ C)$ と海面温度 $W(^\circ C)$ の関係において、下表のような 4 対のデータが得られている。最小二乗法による直線近似により、この点での A と W の関係を示せ。

A	0	2	4	6
W	2	3	3	4

数学 問題3

世のある様々な現象が、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{1}$$

で表されるモデルによってうまく説明できる。この微分方程式に関し、以下の設問に答えよ。

設問1

いま、(1) において、$x = x_0$ で $y = y_0$ としたとき、この微分方程式を解け。

また、x を横軸に, y を縦軸にとり、$x \geq x_0$ として、解の様子を図に示せ。

設問2

放射性物質の崩壊のしかたも、(1) の微分方程式でモデル化できるものの一つである。$N = N(t)$ を、時刻 t におけるある放射性物質の中の原子の個数とし、単位時間当りの崩壊数 $-dN/dt$ を崩壊率と定義すると、崩壊率は現在の原子数に比例し、次式が成り立つ。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{2}$$

ここで λ は正の定数で、崩壊定数と呼ばれる。

原子数が半分に減少するまでの時間は、その物質の半減期（τ とする）と呼ばれる。λ を τ を用いて表せ。

設問3（設問2からの続き）

いま、実際に測定可能な量が N ではなく、崩壊率 $-dN/dt$ である場合を考える。

半減期が τ_0 である放射性物質 Z は、大気中でのみ生成され、その一部は海中に取り込まれる。いま、大気と接触している海水表層での、この物質の崩壊率は太古より一定値 R_0 であるとする。海水が深く潜り大気との接触を絶つと、この物質は一方的に減少することになる。ある深層水のサンプルから、この物質の崩壊率を測定すると R であった。この深層水の年齢 T_0(大気との接触を絶ってからの時間）を、τ_0, R_0, R を用いて表せ。

設問4

経済学者マルサスは、「人口論」において次のようなアイデアを示した。

もし $M = M(t)$ がある時刻 t における、ある国の総人口を表すものとすると、短い時間間隔 δt における出生数と死亡数は、ともに人口の大きさと時間間隔に比例する。すなわち、

$$\text{出生数} = \alpha M \delta t, \quad \text{死亡数} = \beta M \delta t \qquad (\alpha, \beta \text{ は定数})。$$

このモデルも (1) の微分方程式に帰することを示せ。また、人口が増加するか減少するかは何で決まるか。

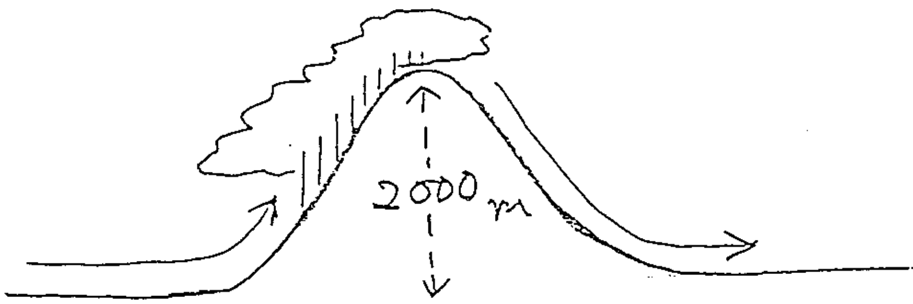
次ぎの語句より３つを選び、それぞれについて説明せよ。

エル・ニーニョ　　地衡風　　温室効果　　β－効果

Brunt-Väisälä振動数　　ポテンシャル温度（温位）

次ぎの文を読み問に答えよ。

図のように風上の気流が山腹に沿ってはい上がるとき、その空気が乾燥している（未飽和である）場合には１００ｍ上昇する毎に１℃気温が下がる。しかし，水蒸気で飽和した空気が上昇する場合には（温度が０℃から１０℃では）１００ｍにつき平均で０．６℃の割合でしか下がらない。



問１　上昇する際に気温が下がるのは何故か。そのとき乾燥した空気に比べて、水蒸気で飽和した場合に温度の下がり方が少ないのは何故か。

問２　風上側の地上気温が２０℃で水蒸気を含んだ空気が上昇し、高さ１０００ｍで飽和に達し雲を生じた。雲粒は直ぐに雨となって、すべて落下し、山頂を越えて再び地上まで達するとすると、地上での気温はどうなるか。

問３　問２と同じ状況で上昇する空気が高さ１８００ｍで飽和に達し、その後、雲中の液層の水分を落下させることなく山腹を下降したとする。このときの地上での気温は何度になるか。また山頂までに雲中の液相の水分の半分を落下させて下降した場合の気温はどうなるか。

問４　問２の風上側の気温を０℃と４０℃とした場合、問２の風下側と風上側の温度差にくらべて、それぞれ少しづつ違ってくる。その違いを定性的に記し、その理由を説明せよ。

問５　実際には、孤立峰の場合、山から少し離れた所の風上の空気が風下へ回り込むことが多い。山から少し離れた大気では気温が－０．７℃/１００ｍの鉛直勾配になっていたとする。この場合、問２と同じ状況で山を越えた空気は風下でどのような振る舞いをすると考えられるか。　周囲の気温の鉛直勾配が－０．８℃/１００ｍの場合はどうか。

水深に比べて水平スケールが大きい場合の回転系での流体運動を記述する方程式として、以下の浅水方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{3}$$

ここで、u, vは、それぞれ、x, y方向の流速で、fはコリオリパラメータ、ηは水面変位、Hは平均水深であり、gは重力加速度である。また、fと Hは空間的に一定とする。以下の問に答えよ。

a）y方向には場が一様、すなわち、$\frac{\partial}{\partial y} = 0$として、上の3つの方程式から vとηを消去し、uに関する方程式を導出せよ。

b）波動解、たとえば $u = u_0 \sin(kx - \sigma t)$、を考え、分散関係を求めよ。

c）$k \to 0$の極限での流体の運動はどうなるか？また、それは何と呼ばれるか？

d）この系には上記のものとは質的に異なる解が存在するが、それはどのようなものか？また、その解の自然界での役割について述べよ。