北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和5年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

令和4年8月

問題１：必答問題

問 1 以下の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + yx - x = 0$

問 2 3 次元空間における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、原点からの距離を r とし、$\boldsymbol{a}$ を任意の定ベクトル、n を整数とするとき、次の (a)–(c) を求めよ。

(a) $\nabla \cdot (r^n \boldsymbol{r})$

(b) $\nabla^2 r^{-1}$

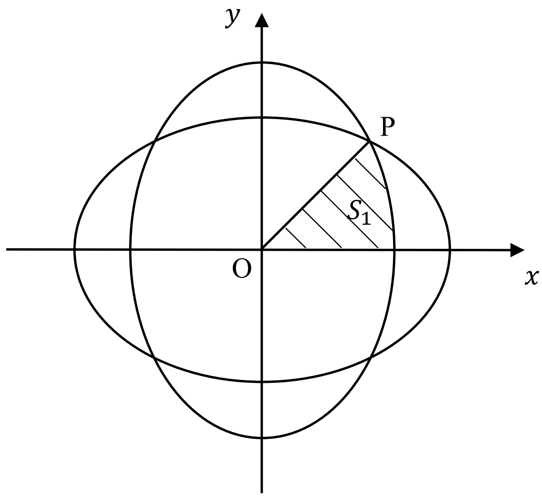
(c) $\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$

問 3 図に示した曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ について、以下の問に答えよ。

(a) 第 1 象限における交点 P の座標を求めよ。

(b) 図の斜線で表される、原点と P を結ぶ線分、x 軸、上記の曲線の一部で区切られた領域の面積 S_1 を求めよ。

(c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ かつ $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \le 1$ で表される領域の面積を求めよ。



問題 2： 必答問題

問 1 図 1 のように、斜面上で質量 m の物体が静止している。角度 θ を少しずつ大きくしていったところ、$\theta = \theta_0$ で斜面を下り始めた。静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' $(\mu' < \mu)$、重力加速度の大きさを g とする。以下の (a)、(b) に答えよ。

(a) θ_0 を求めよ。

(b) 物体が斜面に沿って距離 L 下る間の力学的エネルギーの減少量を求めよ。

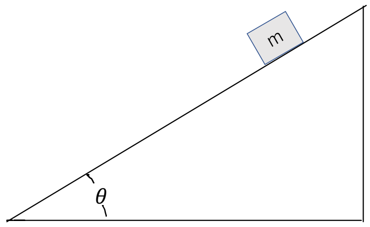


図 1:

問 2 図 2 のような、質量 m の物体 A と B を考える。B は重さの無視できるバネがその左側に取り付けられている。バネのばね定数は k であり、床には摩擦がないとする。物体 A を速さ v_0 で B に衝突させた。以下の (a)–(c) に答えよ。

(a) B を床面に固定した時、バネは最大でどれだけ縮むか。

(b) B を床面に固定していない時には衝突すると B も動くが、その場合、バネは最大でどれだけ縮むか。

(c) B を床面に固定していない場合、衝突後にバネが自然長に戻った時の物体 A と B それぞれの速さはいくらか。

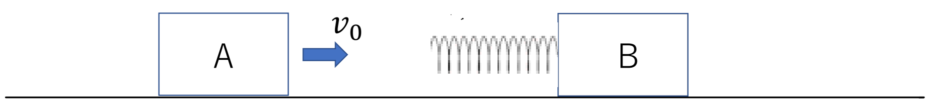


図 2:

問 3 媒質の変位が、振幅 a、波長 λ の正弦波として伝わる縦波がある。変位は x 方向に速度 v で伝わっている。時刻 0 における各地点での変位は図 3 のように書き表せるものとする。

(a) 時刻 t の x 軸上における変位 $f(x,t)$ を上記の変数を用いて書き表せ。

(b) 図 3 において、縦波の粗密によって圧力が最大となっている点は A, B, C, D 点のうちのどれか。その理由とともに答えよ。

(c) D 点における変位の時間変化のグラフを時刻 0 を原点として描け。

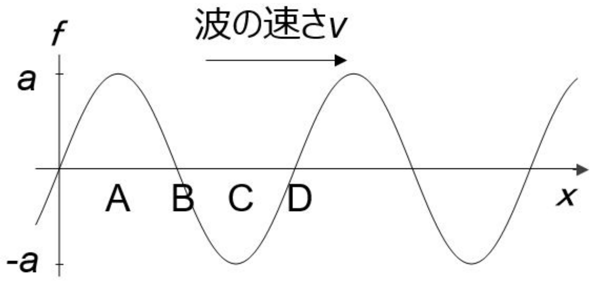


図 3:

問題 3： 選択問題・数学

連立方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$t = 0 \text{ で } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \tag{2}$$

について、以下の問に答えよ。

問 1 式 (1) を形式的に $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = M\boldsymbol{x}$ と書く。ここで、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。M の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。

問 2

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 T を求めよ。

問 3 次に

$$\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$$

という変換を考える。ここで $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ である。このとき、$\boldsymbol{y}$ に関して、式 (1)、(2) の初期値問題を解け。ただし、$\boldsymbol{y}$ の初期値は $\boldsymbol{y_0} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$ であり、

$$\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

を満たすものとする。

問 4 問 3 を利用し、式 (1)、(2) の初期値問題を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に関して解け。また、初期値を $\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ としたときの解の軌道を、(x_1, x_2) 平面上に図示せよ。（この場合、x_1、x_2 は実数であることに注意せよ。）

問題4：選択問題・数学

実関数 $x(t)$ のフーリエ変換を

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{1}$$

で定義する。$X(\omega)$ は $x(t)$ のフーリエ係数と呼ばれる。ω は実数、i は虚数単位である。

問 1 $\overline{X}(\omega) = X(-\omega)$ を示せ。ただし上線は複素共役を表す。

問 2

$$g(t) \equiv \begin{cases} 1 & (-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}) \\ 0 & (t < -\frac{T}{2},\ t > \frac{T}{2}) \end{cases} \tag{2}$$

のフーリエ係数 $G(\omega)$ を求めよ。ただし、$G(\omega)$ は実数であることがわかる形で表せ。

問 3 $G(0)$ を求め、$G(\omega)$ の概形を図示せよ。

問 4 実関数 $x(t)$、$y(t)$ のフーリエ係数をそれぞれ $X(\omega)$、$Y(\omega)$ とすると、

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

のフーリエ係数は $\alpha X(\omega)\overline{Y}(\omega)$ の形で表されることを示し、定数 α を求めよ。

問 5 任意の実関数 $x(t)$ に対する移動平均 $f(t) \equiv \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\,d\tau$ のフーリエ係数 $F(\omega)$ について、$F(\omega) = 0$ となる ω を求めよ。

さらに、$x(t)$ のフーリエ係数を変化させない、即ち $X(\omega) = F(\omega)$ となる ω を求めよ。

問題5：選択問題・物理学

中央が窪んだ円形容器 (中華鍋のようなもの) の中での質点の運動を考える。容器の底の高さ h は、中心からの水平距離 r のみに依存する。重力加速度の大きさを g とし、質点には摩擦や空気抵抗は働かないとする。

問 1 質点は一定の速さ v_0 で中心から水平距離 R の円周上を円運動をしていた。$r = R$ での底面の勾配 $\dfrac{dh}{dr}$ を求めよ。

問 2 中心から水平距離 r の円周上を円運動する質点が 1 回りする時間は r に依存しなかった。$h(r)$ を求めよ。

問 3 この系での質量 m の質点の力学的エネルギー保存の式を記せ。なお、円周に沿う速度成分を v_θ、それに直交する速度成分を v_r とせよ。

問 4 中心から水平距離 R の円周上を円運動している質点の円周に沿う方向の速度成分 v_θ を、瞬間的に、円運動における v_0 から v_1 $(v_1 > v_0 > 0)$ に増加させた。到達可能な最大の r を求めよ。

問題 6： 選択問題・物理学

アボガドロ定数 N_A 程度の個数の球形の分子の集合からなる気体について、その分子レベルの運動を考える。圧力 p、温度 T において N 個の気体分子があるとし、この気体は理想気体とみなしてよいものとする。ここでボルツマン定数を k_B、普遍気体定数を R とする。

問 1 ボルツマン定数 k_B を R と N_A を用いて表せ。

問 2 気体分子の数密度（単位体積あたりの分子数）を求めよ。

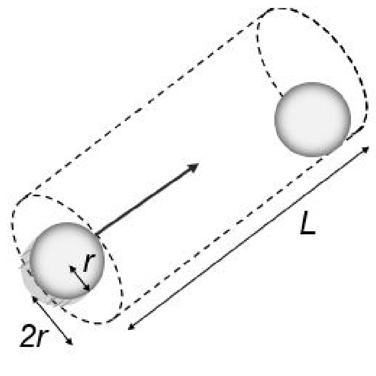
問 3 分子の半径が r であるとき、他の分子の中心がこの分子の中心から $2r$ の距離まで近づくと衝突する。まず、1 つの分子が一定の速さで距離 L だけ移動し、ほかの分子は静止しているものと仮定する。このとき下図に示すシリンダー内にある分子の数が衝突回数 N_{col} であると考えられる。衝突回数 N_{col} を求めよ。また、衝突したのち次の衝突までに分子の動く距離の平均値 λ_0 を求めよ。

問 4 問 3 では移動する 1 つの分子以外はすべて静止しているとしたが、実際にはすべての分子が 3 次元空間を動いている。この分子同士の相対的な運動を考慮したとき、実際に次の衝突までに分子の動く距離（平均自由行程）λ は問 3 で求めた値の $\boxed{}$ 倍になる。$\boxed{}$ に入る適切な値を 1 つ選べ。

(ア) $1/2$, (イ) $1/\sqrt{2}$, (ウ) $\sqrt{2}$, (エ) 2

また、分子の半径 r を 1.0×10^{-10} m とするとき、気圧を 1000 hPa、温度を 300 K として、相対運動を考慮した平均自由行程 λ は、分子の半径 r の何倍のオーダーになるかを求めよ。ここでボルツマン定数 k_B として 1.38×10^{-23} J K^{-1} を用いてよい。

問 5 質量 m の分子の速さ v が v と $v+dv$ の範囲内にある確率は $v^2\exp(-mv^2/2k_BT)\,dv$ に比例することが知られている。このとき、気体分子の速さの最頻値を求めよ。



問題 7： 選択問題・地球物理学

図 1 は北太平洋における、年平均の風応力 (a) とそのカール (b) の分布を示している。亜熱帯循環（風成循環）に関する以下の問に答えよ。

問 1 風成循環に関する以下の説明に対し、$\boxed{\text{A}}$ – $\boxed{\text{L}}$ に当てはまる言葉を書け（選択肢があるものはその中から選べ）。

長い時間スケールで風に対する海洋の応答を考えた場合、表層の水は $\boxed{\text{A}}$ 輸送により、北半球では風が吹く方向に対して $\boxed{\text{B}}$ 方向に運ばれる。北太平洋の亜熱帯海域の内部領域では、北側に偏西風、南側に貿易風を持つため（図 1a）、風応力カールは負となり（図 1b）、表層の水は $\boxed{\text{C}}$ { 北上, 南下, 収束, 発散 } する。 そのため、その下の水柱は $\boxed{\text{D}}$ { 押し縮められる, 引き伸ばされる } 。 そうすると、$\left[\boxed{\text{E}} + (\text{相対渦度})\right]/(\text{水柱の厚さ})$ で表される渦位が保存されるためには、相対渦度が無視できるとすると、$\boxed{\text{E}}$ が $\boxed{\text{F}}$ { 小さく, 大きく } なる必要がある。そのためには水柱は $\boxed{\text{G}}$ { 東, 西, 南, 北 } へ移動しなければならない。このような内部領域での力学バランスのことを $\boxed{\text{H}}$ バランスという。このようにして内部領域で移動した水は、境界付近でまとまって元の方向へ戻され、亜熱帯循環が形成される。このまとまった流れである、亜熱帯循環の境界流が $\boxed{\text{I（海流の名前）}}$ であり、$\boxed{\text{I}}$ の表層での流速は $\boxed{\text{J}}$ { 0.2–0.5, 0.5–1.0, 1.0–2.0, 2.0–4.0, 4.0–8.0 } m s^{-1} 程度にもなる。北太平洋の風応力が数か月から数年スケールで変化した場合、その変化による海洋の変動は、$\boxed{\text{K}}$ 波として、$\boxed{\text{L}}$ { 東, 西, 南, 北 } へ伝播する。

問 2 亜熱帯域（北緯 18–40 度くらいの範囲）での風成循環はどのようになるか。強流域がわかるように、流線を用いた図を示して、その概要を簡略に説明せよ。地図の描画は不要である。

問 3 図 1 のような風応力のもと、北緯 30 度での、海面水位と主水温躍層の深さはどのようになるか。東西鉛直断面における海面水位と主水温躍層の深さの分布を図示せよ。また、そのような分布になる理由を簡略に述べよ。

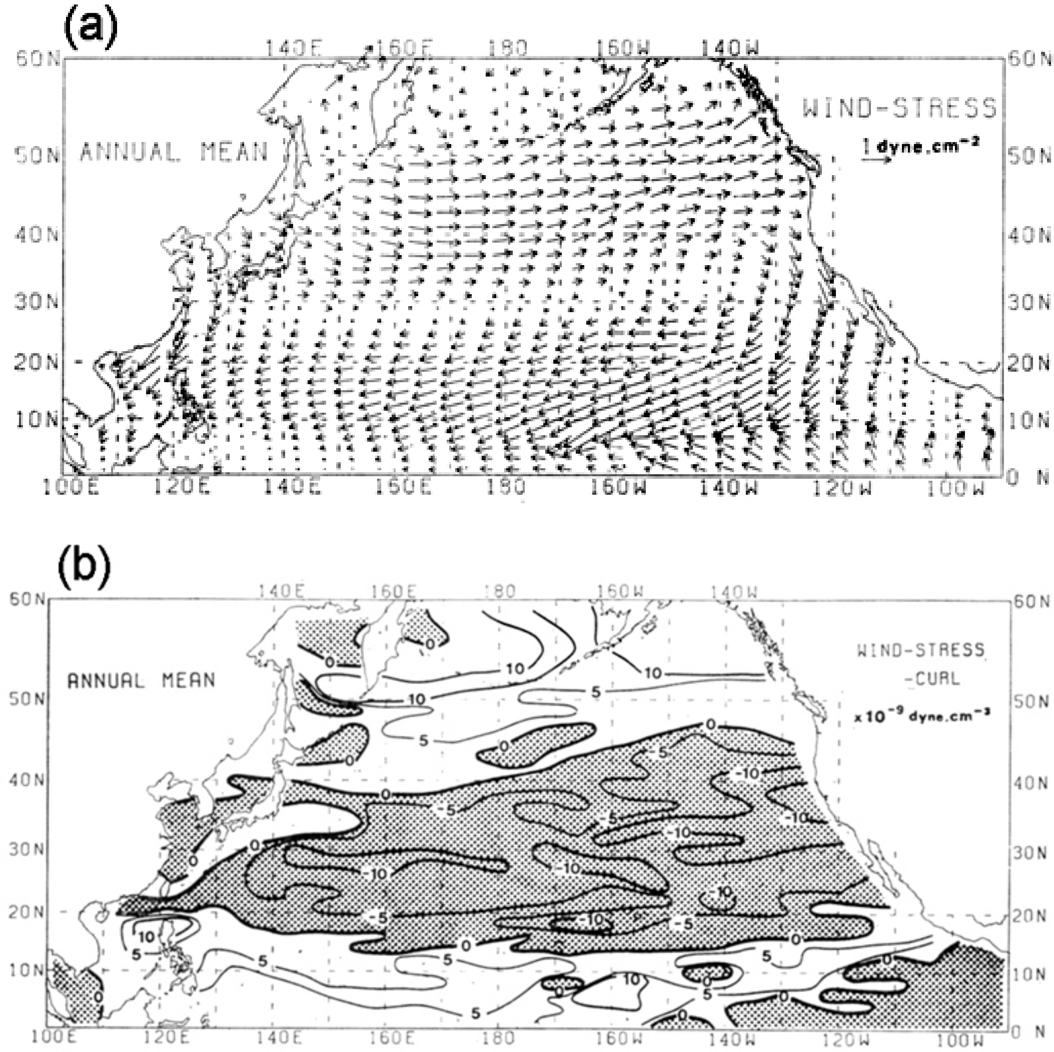


図 1: 北太平洋における、年平均の風応力 (a) とそのカール (b)

問題 8： 選択問題・地球物理学

移動性高気圧に覆われ晴れた日には、海岸付近にしばしば海陸風が観測される。日中には海から陸へ向かう風（海風）が吹き、夜間には陸から海へ向かう風（陸風）が吹く。図 1 に、日中、海風が発達した状態の模式図を示す。海風の最大風速は 5 m s^{-1} 程度である。また、上空には反流が見られ、おおまかには水平鉛直の 2 次元平面内の閉じた循環を形成している。以下の問に答えよ。

問 1 海陸風が生じる原因は、海面と陸面における日射による加熱の違いにある。海面温度の日較差は典型的には 0.2 °C 程度であるが、陸面ではずっと大きく 20 °C を超える場合もある。このような海陸の違いの主な理由として考えられることを 3 点、それぞれ、(1) 比熱容量、(2) 蒸発量、(3) 海水の混合、に着目して説明せよ。

問 2 大気の運動方程式には、コリオリ力、気圧傾度力、摩擦力が現れる。

(a) 大気中における摩擦力とは実際にはどのような過程によるものか。簡潔に答えよ。

(b) 自由対流圏やその上空における総観規模から惑星規模の大気の運動において、定常状態ではどの力が支配的となるか。風と力の向きの関係を図示せよ。またそのような風を何と呼ぶか。

(c) 海陸風においては、どの力が支配的となると考えられるか。また、風と力の向きの関係を図示せよ。

問 3 図 1 には、気温偏差（暖、冷）の分布（ただし、同一高度における相対的な違い）と等圧面の高度分布が描かれている。このような等圧面分布により、海風と反流が生じている。気温と気圧がこのような関係になる理由を考察してみよう。

(a) 気温分布が与えられた時、等圧面の高度分布を与える層厚の式（ある気圧面 P_1 とある気圧面 P_2 との間のジオポテンシャル高度 Z の差）

$$Z(P_2) - Z(P_1) = \frac{R}{g_0} \int_{P_2}^{P_1} \frac{T}{P}\, dP \tag{1}$$

を以下により導出する。なお、記号の説明は以下の問題文および表 1 に示す。また、水蒸気の存在はここでは無視する。

ジオポテンシャル Φ とは高度（幾何学的高度）z に位置する空気塊が持つ単位質量あたりの位置エネルギーと定義され、

$$\frac{d\Phi}{dz} = g \tag{2}$$

の関係がある。さらに、ジオポテンシャル高度 Z は Φ を用いて

$$Z = \frac{\Phi}{g_0} \tag{3}$$

と定義され、気象学ではしばしば z の代わりに用いる。式 (2)、(3) に加え、乾燥空気の状態方程式

$$P = \rho R T \tag{4}$$

と静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{5}$$

を用いて、層厚の式 (1) の導出過程を示せ。

(b) 上記の層厚の式より、図 1 において、冷偏差の領域で等圧面の間隔が狭まり、暖偏差の領域で等圧面の間隔が広がっている理由を簡潔に説明せよ。

(c) 図 1 の等圧面分布に基づいて、海風と反流それぞれの高度領域における気圧傾度力の向きを述べよ。

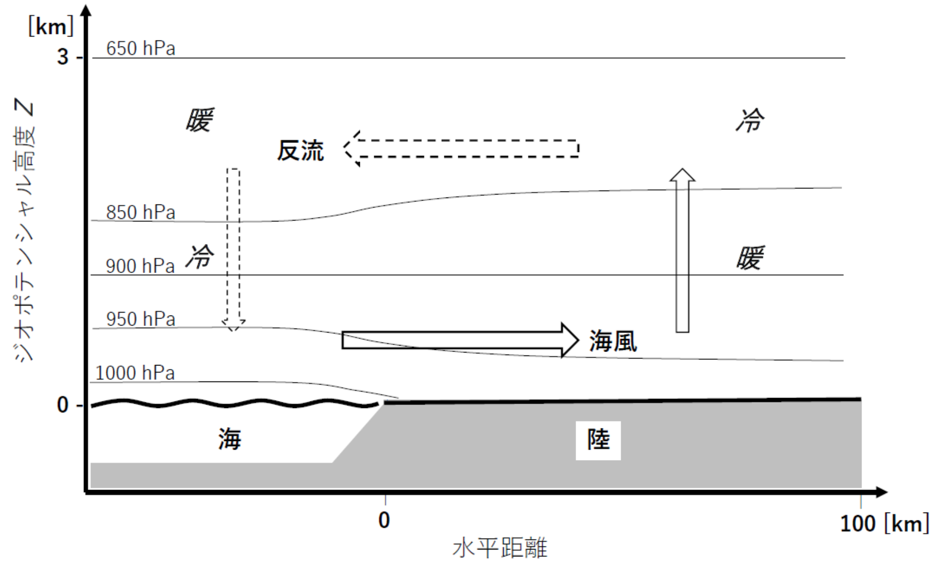


図 1: 海風に伴う流れ（矢印）、等圧面（細い線）、気温偏差（暖、冷）の分布の模式図。気温偏差（暖、冷）は、同一高度における相対的な違い。（小倉義光、「一般気象学　第 2 版」、1999、を参考に作成。）

g (g_0)	重力加速度 (平均海面における全球平均の g)
P (P_1, P_2)	気圧 (ある特定の気圧面)
ρ	密度
R	乾燥空気の固有気体定数
T	気温

表 1: 記号の説明

問題 9： 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

問 1 海洋表層の塩分分布を決める要因を説明せよ。高緯度ほど塩分が低く、太平洋の方が大西洋よりも塩分が低い理由も含めること。

問 2 海洋を計測する手法として係留系によるものがある。この観測手法を、計測しうる物理量、長所と短所を含めて、説明せよ。

問 3 水位、流速、密度境界面の変動は、北半球の沿岸域では岸を右に見る方向に、赤道付近では東方向に伝播する傾向がある。このメカニズムを説明せよ。

問 4 気候モデルを用いた実験により地球温暖化の要因を明らかにする方法について説明せよ。

問 5 再生可能エネルギーのうち、大気や気象が関わるものについて 2 つ挙げ、それぞれの長所と短所を含めて説明せよ。

問 6 大気中の湿度の測定方法について、2 種類挙げ、それぞれの原理を説明せよ。