

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

令和3年度大学院修士課程入学試験課題 専門科目

課題1と2は必答課題、課題3～8は選択課題である。必答2課題は必ず解答すること。選択課題は、数学2課題・物理学2課題・地球物理学2課題、計6課題出題されている。その中から1課題を選択し、解答、もしくは、論述すること。課題毎に別の答案用紙を使用し、答案用紙には課題番号・受験番号・氏名を記入すること。答案は手書きとする。

また、選択課題の解答に際して参考にした書籍、論文、ウェブページ等があれば、それについても記すこと。なお、問に文字数の指定がある場合、参考資料情報は文字数には数えない。

令和2年7月

課題1：必答課題

問1 直交直線座標系 (x, y, z) におけるスカラー関数 $\phi = -e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ について、以下の(a)–(d)を求めよ。ただし、 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ とする。

(a) $\nabla\phi$

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\phi$

(c) $\nabla \cdot \mathbf{v}$

(d) $\nabla \times \mathbf{v}$

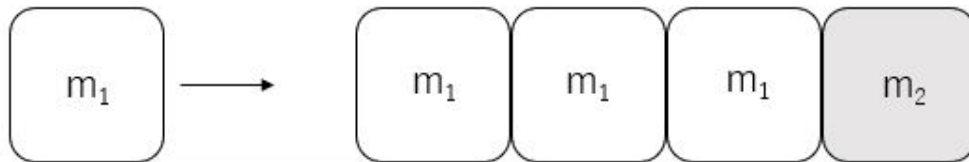
問2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問3 以下の初期値問題を解け。ただし、 a, b は正の実数であり、かつ、 $a^2 - 4b^2 \neq 0$ とする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + b^2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

課題2：必答課題

問1 下図のように、形の等しい5個の物体が、滑らかな水平面上で一直線に並んでいる。右端の物体の質量は m_2 であり、残りの物体の質量は m_1 である。いま左端の物体に速さ v を与えて左から2個目の物体に衝突させたとすると、その後の各物体の運動の速さと向きを答えよ。 m_1 と m_2 の関係に注意して記せ。物体は完全弾性衝突をするものとする。

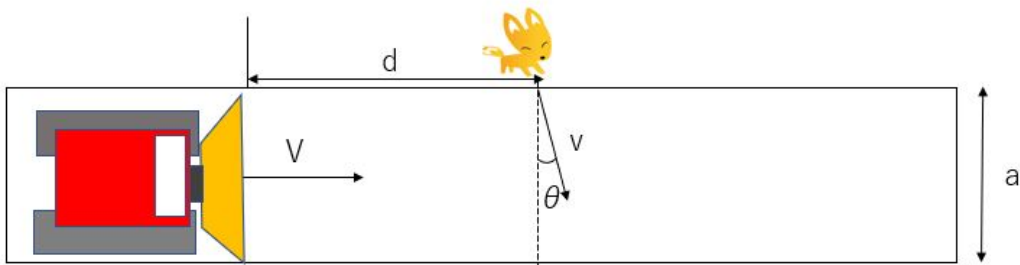


問2 密度が一様な質量 M 、半径 R の円柱状の物体を、水平面となす角が θ である斜面の高さ h のところに静かに置いたら転がり落ちた。重力加速度の大きさを g とし、以下の問に答えよ。

- (a) この物体の重心および回転の運動方程式を求めよ。
- (b) この物体が高さ0に達した時の速さを求めよ。
- (c) この物体に穴をあけて質量を半分に減らし、転がり落ちる速さを変化させたい。重心が等加速度で運動するようにはどうすればいいか。その場合について、最も遅くなるあけ方はどのようなものか。最も遅くなる場合について高さ h のところから同様に転がり落ちた時、高さ0での速さを求めよ。なお、穴の個数や形状は任意とする。

問3 幅 a の除雪車が、同じく幅 a の道路の道幅いっぱいに除雪しながら、一定の速さ V で進んでいる。キタキツネが除雪車から距離 d だけ離れた位置から、一定の速さでまっすぐに歩いて道路を渡りきろうとする場合に、キタキツネが取れる最もゆっくりした速さを考えたい。図のようにキタキツネは道路に直角方向から角度 θ 、速さ v で進むとする。以下の問に答えよ。

- (a) キタキツネが道路を横切るのにかかる時間 T はいくらか。
- (b) 与えられた角度 θ に対し、除雪車に接触せずにキタキツネが道路をわたりきる限界速さ v_c は $Va/(a \sin \theta + d \cos \theta)$ とかけることを示せ。
- (c) (b) の関係式から限界速さ v_c の最小値と、そのときの角度 θ を a と d を用いて記せ。



課題3：選択課題・数学

大気海洋物理学においては微分方程式をよく用いるが、手で解くことができない方程式は、差分化し、コンピューターを用いて数値的に解くことが多い。ここでは、以下の境界値問題を考える。

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + cy &= 0 \\ y(0) &= 0, \quad y(X) = 0\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 c は境界条件を満足するように求まる未定の定数、 $A(x)$ は $0 \leq x \leq X$ で与えられた微分可能な連続関数である。

$0 \leq x \leq X$ を、境界も含む $N + 2$ の点に離散化し、 x の刻み幅を $h = X/(N + 1)$ としたとき、誤差が h^2 となる精度で (1) を差分化せよ。行列の固有値と固有ベクトルを求めるプログラムが与えられているとしたとき、この問題を数値的に解く方法を述べよ。

課題4：選択課題・数学

複素平面上の正則な関数 $f(z)$ を考えたとき、コーシー・リーマンの関係式、および、 a を囲む閉曲線 C に沿う積分に関するコーシーの積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

が成り立つことを証明せよ。ここで i は虚数単位である。

また、複素平面上の積分の性質を応用して、

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

を計算せよ。

課題5：選択課題・物理学

ケプラーの3法則とはどのようなものか述べよ。さらに、ニュートンの運動の法則と万有引力の法則の下で、ケプラーの3法則が成り立つことを証明せよ。

課題6：選択課題・物理学

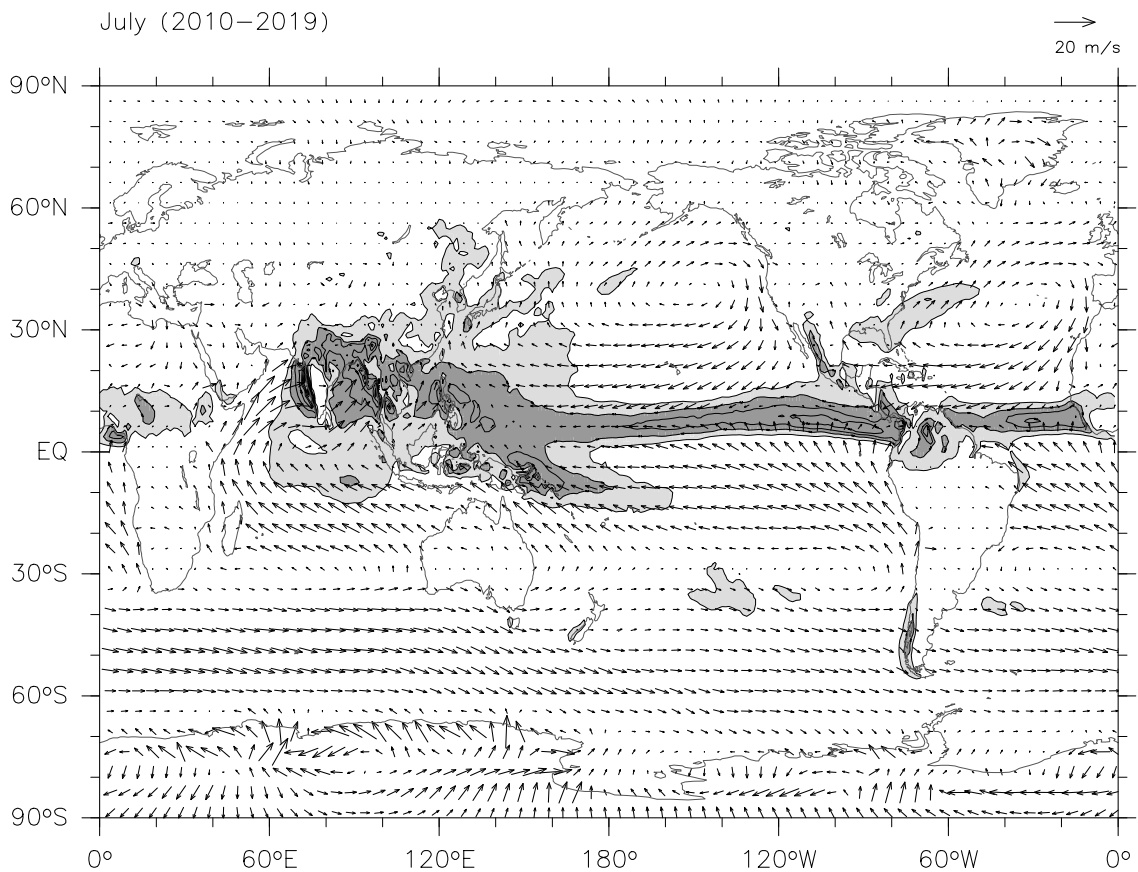
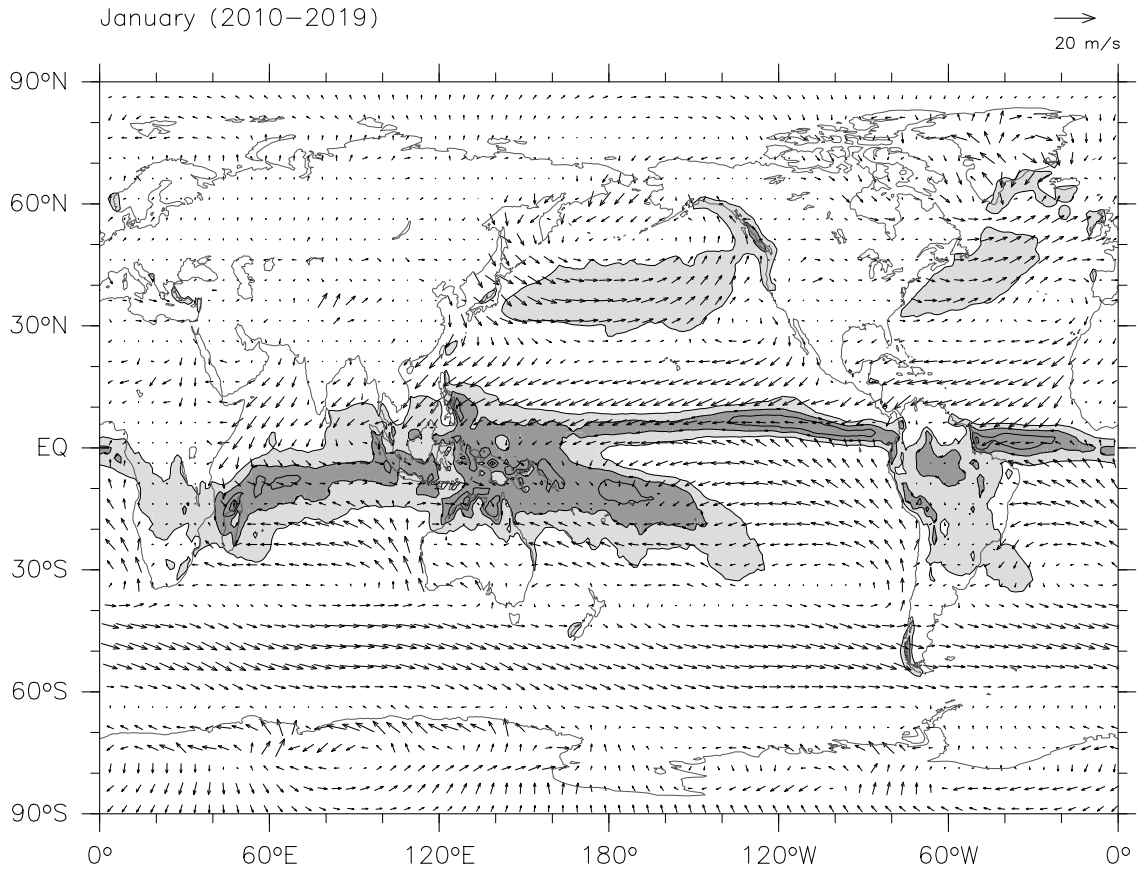
外力と内力が働く場での、質点系の全角運動量の式をニュートンの運動の法則から導出せよ。なお、その際、質点間に働く力は、質点と質点を結ぶ直線に平行であるとする。さらに、この式を用いて、重力下では回転していないコマはすぐに倒れてしまうが、十分に速く回転している場合には立っていられる理由について論ぜよ。

課題7：選択課題・地球物理学

図1に、10年間の平均の1月と7月の地表風と降水量の分布を示す。以下の問に答えよ。

- 問1 1月の日本の天候について、図1も参照しながら、その特徴を説明せよ（100–200字程度）。
- 問2 7月の日本の天候について、図1も参照しながら、その特徴を説明せよ（100–200字程度）。
- 問3 1月の北半球中緯度の太平洋と大西洋の降水帯について、その成因を説明せよ（100–200字程度）。
- 問4 7月の北半球亜熱帯～中緯度領域の東太平洋と大西洋の時計回りの循環の成因を説明せよ（100–200字程度）。
- 問5 インド洋から南アジアにかけての領域における顕著な季節変化の特徴を記述し、その原因を説明せよ（100–200字程度）。
- 問6 熱帯域の降水帯と地表風との関係を説明せよ（50字程度）。
- 問7 南極大陸の沿岸域では、いずれの月においても、強い沖向きの風が吹いている領域がある。その沖向きの風の成因を説明せよ（50–100字程度）。

図1（次のページ）：2010–2019年の10年平均の1月（上）と7月（下）の地表風（高度10 mにおける水平風）と降水量の分布。降水量の等値線は5 mm/dayごとで、5–10 mm/dayの領域を薄い灰色で、10 mm/day以上の領域を濃い灰色で塗ってある。水平分解能 $1.25^{\circ} \times 1.25^{\circ}$ 、月平均の気象庁55年長期再解析データを使用して作成した。なお、地表風ベクトルは 5° 間隔に間引いて表示してある。



課題8：選択課題・地球物理学

図は太平洋の年平均の力学的海面高度分布を示したものである。以下の問に答えよ。

- 問1 力学的海面高度分布から表層の流れが推定できる原理を説明せよ (100–200 字程度)。
- 問2 力学的海面高度分布もしくはその時間変動を求める手法を2つあげ、それぞれ解説せよ (合わせて300–600 字程度)。
- 問3 力学的海面高度分布からわかる北太平洋の表層循環の概要を述べよ (150–300 字程度)。
- 問4 亜熱帯域に着目し、この海域にできる循環のメカニズムを、どの海域に強い流れが生じるかを含めて、以下にあげる6つの用語のうち4つ以上を用いて解説せよ (300–600 字程度)。
(渦位、スベルドラップバランス、風応力、エクマン輸送、摩擦、相対渦度)
- 問5 日本の沖を流れる黒潮は、幅が約100 kmあり、黒潮の沖側は沿岸側より約1 m 海面高度が高くなっている。緯度を 30° として、黒潮の表層の流速はどの程度になるか、計算過程も示して答えよ。

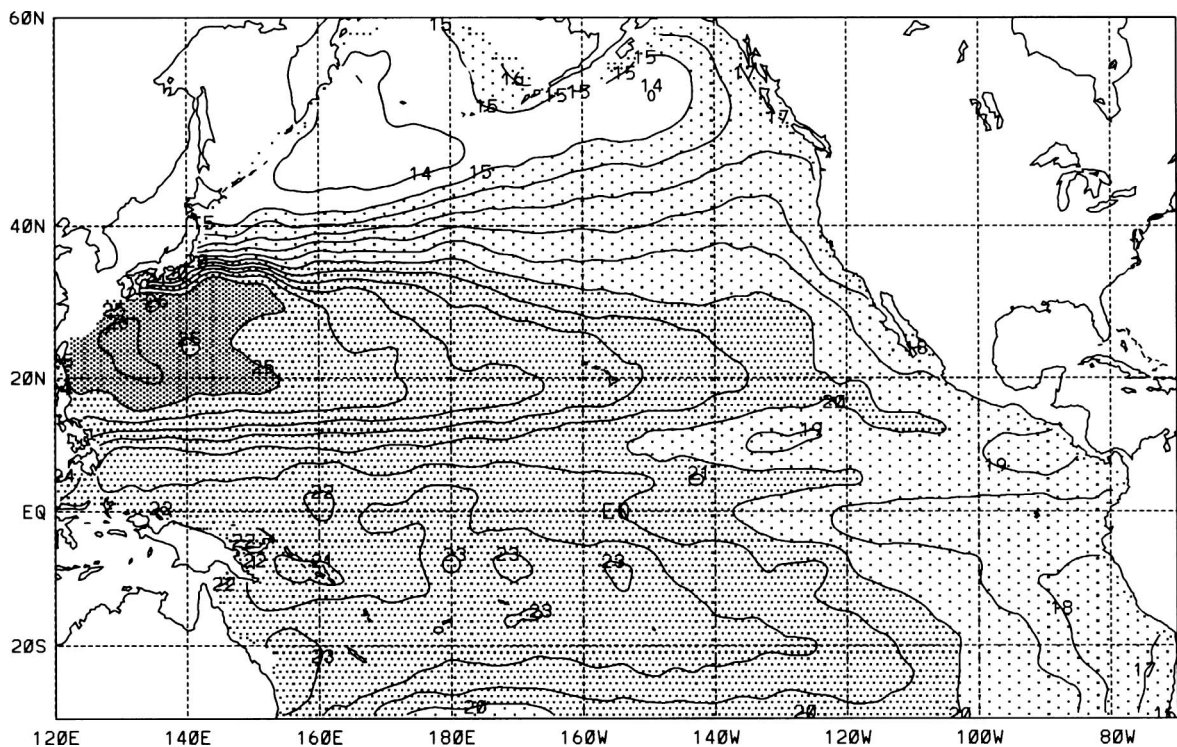


図: 太平洋の年平均の力学的海面高度分布 (単位: 10 cm)。影が濃いほど海面高度が高い。