北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成31年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3～9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成30年8月

（平成30年8月23日に実施した入学試験において、問題1問1(b)に誤りがありました。受験生の皆様にお詫びするとともに、以下に掲載する問題は修正済みであることを申し添えます。）

問題１：必答問題

問 1 以下の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^3}{y} = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \lim_{x\to\infty} y = 0$

問 2 以下を求めよ。

(a) $\displaystyle\int x \log x \, dx$

(b) $\displaystyle\frac{d}{dy}\int_0^{y^2} \left(e^{x^2} + e^{y^2}\right) dx$

問 3 3 次元空間における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、任意の定ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とするとき、次の (a), (b) を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{a}\}$

(b) $\nabla \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a})$

問 4 複素関数 z および ζ に対して、

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$$

なる変換を考える。このとき、ζ 平面上の原点を中心とする半径 a の円は、z 平面上ではどのような図形で表されるか。図示せよ。

問題2：必答問題

問 1 質量 m の物体が、空気抵抗をうけながら速度 v で落下する。時刻を t とし、鉛直下向きに x 軸をとる。空気抵抗力の大きさは $k|v|$ であるとする (k は定数)。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

(a) この物体の運動方程式を示せ。

(b) $t \to +\infty$ で v は一定値 c に漸近する。c を求めよ。

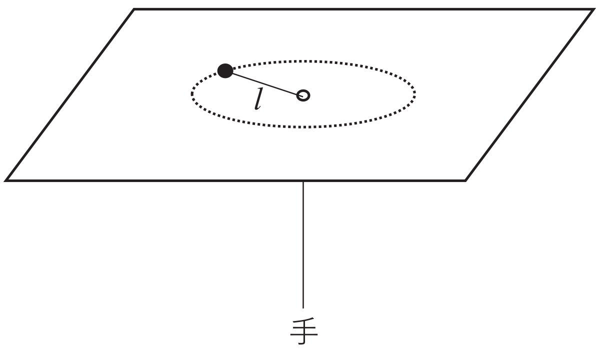
(c) この物体が $t = 0$ に静止状態から落下し始める場合について、v を t の関数として表せ。

問 2 水平に固定された滑らかな板に小さな穴があいている。質量 m の物体をつけた糸をそこに通し、穴の下で手で持っている。以下では、板の上に出ている糸の部分の長さを糸の長さと称する。はじめは図のように、糸の長さは l で、物体は板の上で速さ V で等速円運動している。以下の問に答えよ。

(a) 手にかかっている力の大きさを求めよ。

(b) 糸をゆっくり引いて、長さを $\dfrac{l}{2}$ にした。その時のおもりの速さと、それまでにした仕事を求めよ。

(c) その後、穴から距離 $\dfrac{l}{3}$ のところから釘が出て糸がかかった。その直後のおもりの速さと回転角速度を求めよ。



問 3 1 mol の理想気体をシリンダーの中にいれ、ピストンにおもりをのせて気体の圧力を 2 気圧に保つ。この状態で、シリンダー内の気体の温度を 0ºC から 100ºC までにあげたとき、この間に気体が外部に対して行う仕事は何 J となるか? ここで、気体定数 $R = 8.3\,\mathrm{J\,mol^{-1}K^{-1}}$ とせよ。

問題3：選択問題・数学

関数 $f(t)$ に対して $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ が存在するとき、$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換と呼び、$L\{f\}$ で表す。ここで $s > 0$ である。このラプラス変換を用いて、連立微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2x, \tag{1}$$

$$\text{ただし}\ t = 0\ \text{において}\ x = 1,\ y = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = 0$$

を解くことを考える。以下の問に答えよ。

問 1 $L\{e^{at}\}$ を求めよ。ただし、a は定数で、$s > a$ とする。

問 2 $L\{\cos at\}$ を求めよ。

問 3 $L\{e^t \cos t\}$ を求めよ。

問 4 関数 f の 1 階から 4 階微分を、それぞれ、f', f'', f''', f'''' とする。f, f', f'', f''' が、それぞれ、$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f' = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f'' = 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f''' = 0$, を満たすとき、以下の (a), (b) が成り立つことを示し、(c) を求めよ。

(a) $L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$

(b) $L\{f''\} = s^2 L\{f\} - sf(0) - f'(0)$

(c) $L\{f''''\}$

問 5 ラプラス変換および、問 1–4 の結果を用いることによって (1) の微分方程式を解け。必要ならば、$\frac{c^3}{c^4+4} = \frac{1}{2}\left\{\frac{c-1}{(c-1)^2+1} + \frac{c+1}{(c+1)^2+1}\right\}$（ここで c は定数）を用いてよい。

問題 4： 選択問題・数学

2 次曲線 $f = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 10x - 6y - 3 = 0$ を例にして、2 次形式の標準形への変換とその幾何学的意味を考える。以下の問に答えよ。

問 1 上の 2 次曲線 $f = 0$ は、2 行 2 列の対称行列 A、ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b}$、ならびに定数 c を用いて、

$$f = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c \tag{1}$$

と表せる。ここで、上付き添字 T は転置である。行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を求めよ。

問 2 行列 A の対角化を考える。

(a) 行列 A の固有値とそれらに属する固有ベクトルを求めよ。

(b) $D = P^{-1}AP$ となるような対角行列 D と行列 P の組を一つ求めよ。

問 3 標準形への変換のため、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \tag{2}$$

となるベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と定ベクトル $\boldsymbol{d}$ を考える。以下では、和と積の転置の関係 $(B + C)^T = B^T + C^T$ と $(BC)^T = C^T B^T$ を用いてよい（ここで、$B,\ C$ は行列またはベクトル)。

(a) $\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{u}^T P^T + \boldsymbol{d}^T$ となることを示せ。

(b) (2) 式により、2 次形式 f が $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ の標準形 $\boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{u}$ を用いて

$$f = \boldsymbol{u}^T D\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}'^T\boldsymbol{u} + c' \tag{3}$$

と表せることを示せ。また、$\boldsymbol{b}' = 0$ となる $\boldsymbol{d}$ を求めよ。

(c) 2 次曲線 $f = 0$ の表す図形の種類を述べ、u–v 平面および x–y 平面で図示せよ。

問題 5： 選択問題・物理学

水平で滑らかな床の上に、ばね定数 k、自然長 L のばねの両端に質量 m のおもりをつないだものが置かれている。ばねの質量は無視できる。以下では常に、運動は一直線上でおこり、ばねはそれに平行な状態を保ち、おもりが何かと衝突する場合は無限小の時間で弾性衝突し、ばねが縮みきることはないものとする。この直線にそって座標軸 x をとり、ばねの長さを l、二つのおもり (おもり 1, 2) の速度をそれぞれ v_1, v_2 と表す。以下の問に答えよ。

問 1 この系の力学的エネルギー保存則を式で表せ。

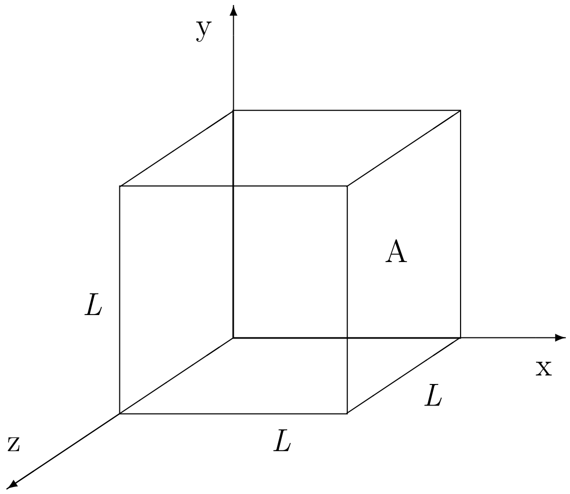
問 2 ばねを縮めた状態で静止させて離したら、伸び縮みする振動をする。その周期を求めよ。

問 3 ばねの長さが自然長のまま、系全体が速度 V で動いていたとする ($v_1 = v_2 = V > 0$)。時刻 $t = 0$ におもり 2 が、$x = 0$ に置いてある質量 m のおもりに衝突した。衝突後の重心の速度を求めよ。さらに、v_1, v_2 を t の関数として表せ。

問 4 問 3 と同様だが、$x = 0$ におもりでなく動かない壁がある場合について、衝突後に系はどのように運動するか説明せよ。

問題６： 選択問題・物理学

気体に関する熱力学的な経験則を、気体をミクロにみた立場から説明することを考えたい。以下の問に答えよ。



問１ 体積 V の容器に N 個の理想気体分子が入っていて、温度 T、圧力 p で平衡状態にある。ボルツマン定数 k は R/N_A と定義され、ここで R は気体定数、N_A は $1\,\mathrm{mol}$ に含まれる気体分子の数 (アボガドロ定数) で 6.0×10^{23} である。ボルツマン定数の値は $1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ を用いてよいものとする。また、$1\,\mathrm{cal} = 4.2\,\mathrm{J}$ であるとしてよい。

(a) N 個の気体分子の数は何 mol か? また、ボイル–シャルルの法則という経験則により求められる N 個の理想気体分子の状態方程式を、ボルツマン定数 k と N を含む形で表せ。

(b) 内部エネルギー U を $U(T,V)$ のように温度 T と体積 V の関数で表す。このとき、定積比熱 C_v を U の偏微分係数を用いて表せ。

問２ 次に、ミクロにみた立場で考える。上の体積 V の容器は、簡単のため、図のような一辺の長さ L の立方体であるとする。この容器の x 軸に直交する面を面 A とする。i 番目の理想気体分子の速度 $\boldsymbol{c}_i$ の x, y, z 成分をそれぞれ u_i, v_i, w_i とし、気体分子 1 個の質量を m とする。

(a) i 番目の分子が面 A に弾性衝突をしてはねかえされたとき、この分子の運動量の変化はいくらかを示せ。また、この分子が面 A に対して単位時間当たりに加える力積はいくらかを示せ。

(b) N 個すべての分子による力積の総和を面の面積で割ったものが面にかかる圧力 p と等しい。分子の運動は平衡に達しており等方的であるので、$\displaystyle\sum_i u_i^2 = \sum_i v_i^2 = \sum_i w_i^2 = \frac{1}{3}\sum_i |\boldsymbol{c}_i|^2$ と書ける。$\displaystyle\sum_i |\boldsymbol{c}_i|^2$ は分子の速さの 2 乗平均 $\langle c^2 \rangle$ を用いて $\langle c^2 \rangle = \dfrac{\sum_i |\boldsymbol{c}_i|^2}{N}$ と書ける。このとき、圧力 p を V, N, m, $\langle c^2 \rangle$ を用いて書き表せ。

(c) この気体の運動エネルギーの総和 E を p と V を用いて書き表せ。

問 3 このようにミクロの立場で求めた理想気体分子すべての運動エネルギーの総和 E が、経験的にみた内部エネルギー U に関係づけられると考えられる。

(a) 問 1, 2 で求めた関係式を用いて、内部エネルギー U をボルツマン定数 k と温度 T を用いて表せ。また、この気体の 1 mol あたりの定積比熱は、単位を cal $\mathrm{K^{-1}mol^{-1}}$ で表すといくらになるか、有効数字 1 桁で計算過程とともに示せ。

(b) 実験結果によると、前問で求めた関係は高温の単原子気体についてはよく成立しているが、例えば常温における水素分子では約 5 cal $\mathrm{K^{-1}mol^{-1}}$ となり一致しない。これは何故か、理由を説明せよ。

問題 7： 選択問題・地球物理学

以下の問に答えよ。

問 1 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{(a)}}$ ～ $\boxed{\text{(d)}}$ に当てはまる語を答えよ。

大気にはたらく力のうち $\boxed{\text{(a)}}$ と $\boxed{\text{(b)}}$ とがつり合った状態で吹く風を地衡風という。地表面付近では、風の吹く方向と逆向きにはたらく $\boxed{\text{(c)}}$ のために地衡風バランスが崩れ、風は $\boxed{\text{(d)}}$ へ吹き込む成分を持つ。

問 2 温度風について 40–60 字程度で説明せよ。

問 3 熱帯低気圧 (台風) と温帯低気圧の生成・維持機構について、その相違点を中心に数行で説明せよ。

問 4 図 1 は、近畿地方を通過した 2 つの台風について 24 時間の移動の様子を地上天気図で示したもので、左側が 2017 年台風 18 号、右側が 2018 年台風 12 号である。前者は西から東へ、後者は東から西へ西日本を横断しており、このように台風の進路が大きく異なった理由について考察したい。図 2 は、上記の台風が近畿地方を通過した時刻における 400 hPa 等圧面の高度分布と西日本を含む経度帯で平均した温度と東西風の緯度–高度断面である。以下の問に答えよ。

(a) 2 つの台風について、図 1 の地上天気図に見られる高気圧の配置の違いが台風の進路に与える影響について簡潔に説明せよ。

(b) 200 hPa から 300 hPa に中心をもつ西風ジェットは、2 つの例で緯度が大きく異なる。図 2 に見られるジェットの位置と温度分布との対応について、温度風の関係に基いて具体的に説明せよ。

(c) 図 2 の 400 hPa 等圧面の高度分布に見られる大陸より張り出す高気圧には、2 つの例の間でどのような違いがあるか。台風の進路に与える影響を含め、簡潔に説明せよ。

(d) 台風の中心はいずれの例でも近畿地方を通過するときには北緯 35 度付近に位置する。図 2 に示された東西風分布の類似点と相違点を指摘し、東西風が台風の進路に与える影響を考察せよ。

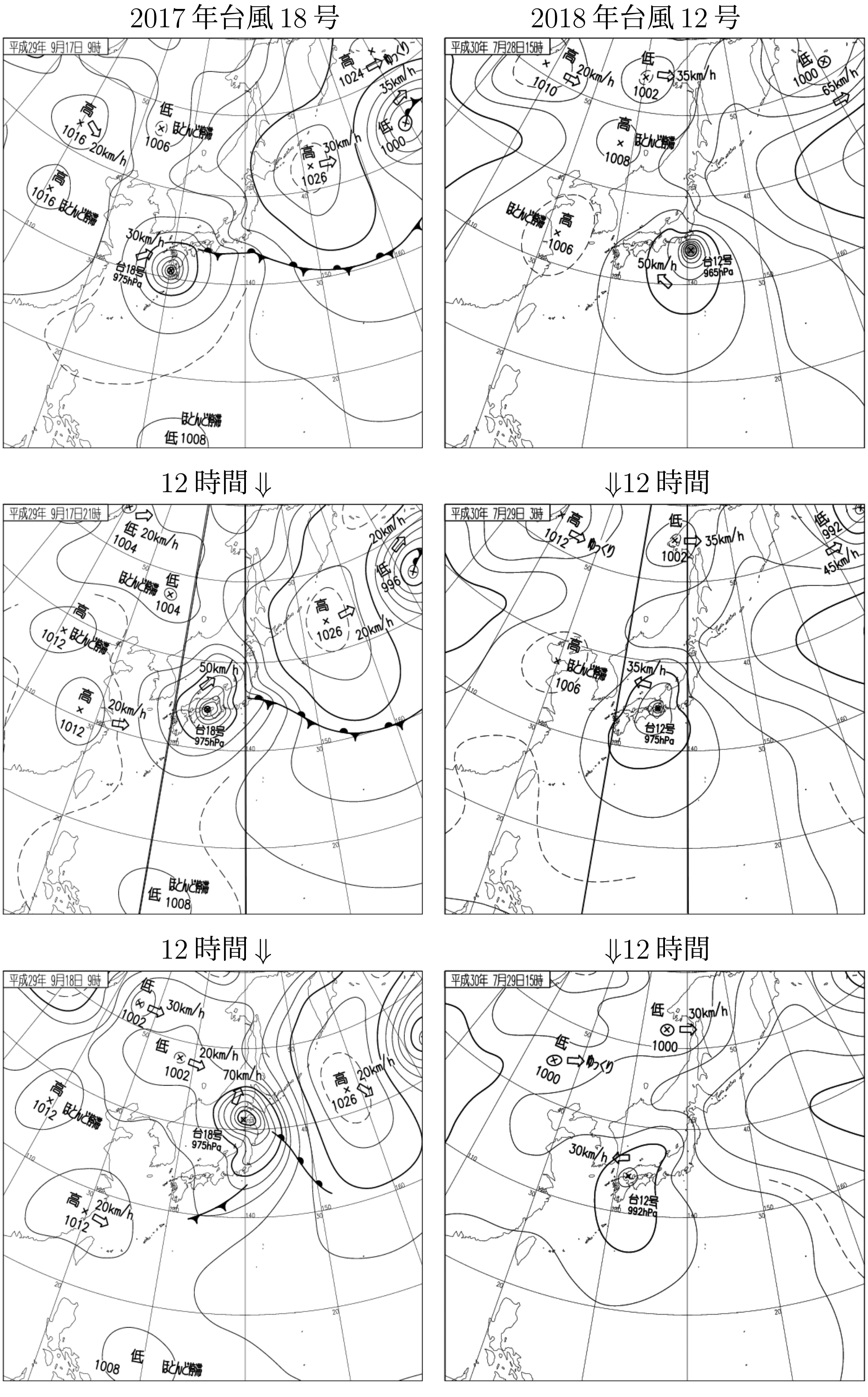


図 1: 台風の中心が近畿地方を通過した 2 例の地上天気図 (気象庁による)。12 時間ごとの 3 枚を時間の順に上から下へ並べている。(左側) 2017 年台風 18 号 (2017 年 9 月 17 日 9 時, 17 日 21 時, 18 日 9 時)、(右側) 2018 年台風 12 号 (2018 年 7 月 28 日 15 時, 29 日 3 時, 29 日 15 時)。中段の図で太線で表示している子午線は、東経 130 度と 140 度を表す。

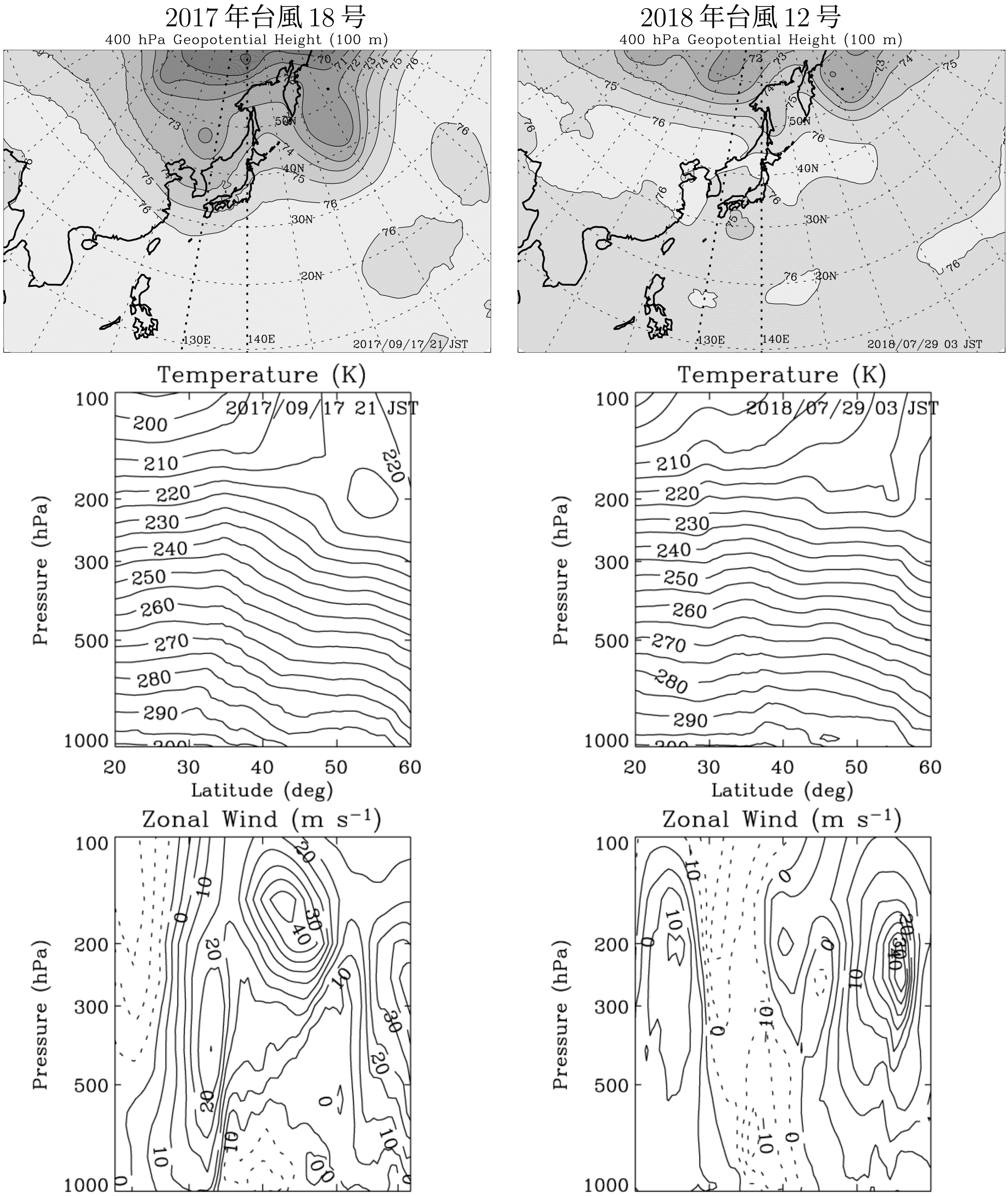


図 2: (左側) 2017 年 9 月 17 日 21 時、(右側) 2018 年 7 月 29 日 3 時の、(上段) 400 hPa 等圧面高度 (100 m 単位で表示し、色が濃い領域ほど高度が低い) の水平分布、(中段) 温度 (K) と (下段) 東西風 (m s^{-1}) の緯度–高度断面 (東経 130 度から 140 度の範囲で平均した値)。東西風の等値線は実線が西風、破線が東風。NOAA の GFS 解析値を用いて作図。

問題 8： 選択問題・地球物理学

海洋の熱塩 (深層) 循環及び熱輸送に関する以下の問に答えよ。

問 1 地球規模の熱塩循環である深層海洋循環は、北大西洋北部と南極沿岸の 2 つの海域から高密度水が沈み込み、それ以外の海域ではゆっくりとした湧昇が生じることで閉じている。この 2 つの海域でできる深層の水塊の名前を記し、それぞれの海域でどのようにして高密度水が生成されるかを簡略に述べよ。

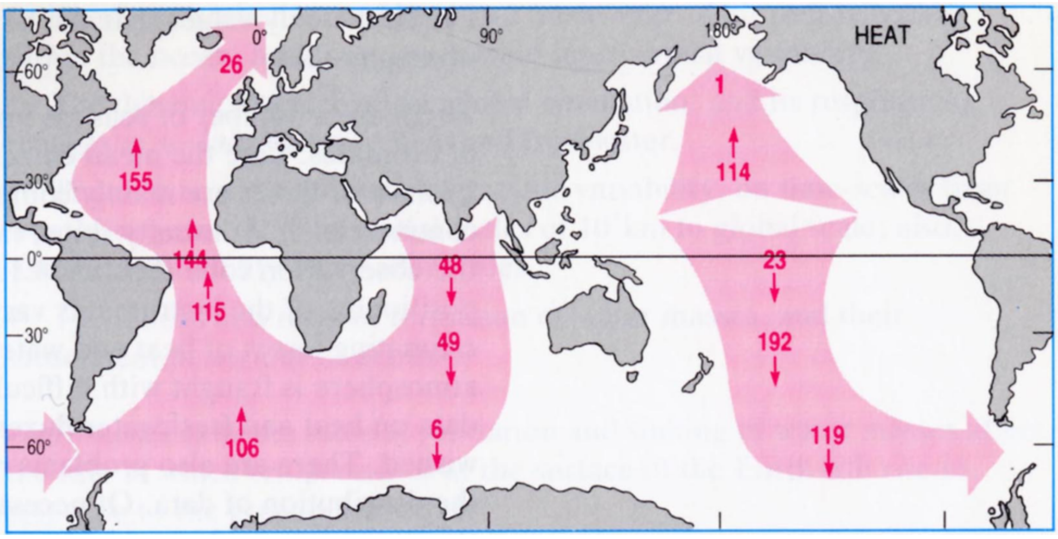
問 2 北大西洋では深層まで及ぶ高密度水ができて、北太平洋ではできない理由を、大気も含めた地球上の水循環の視点も入れて、60–100 字程度で説明せよ。

問 3 北太平洋では深層まで潜り込むような高密度水はできないが、北太平洋の中層 (200–800 m 程度) まで潜り込む高密度水は、ある海で生成される。その海とはどの海で、どのようにして生成されるか。

問 4 下図は、海洋全層 (表層から海底までの積分) での南北方向の熱輸送を表したものである。各大洋の北半球、南半球それぞれにおいて、低緯度域と高緯度域との間の熱輸送は概ねどうなっているかを、その理由とともに 40–80 字程度で述べよ。

問 5 下図において、低緯度域と高緯度域との間の熱輸送の方向が逆の海域が一つだけある。それはどの海か? また、なぜ逆になっているのか。海洋の熱塩 (深層) 循環の観点から、合わせて 60–100 字程度で説明せよ。

単位は 10^{13} W



(The Open University: Ocean Circulation, Pergamon Press より)

問題９： 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) 静止気象衛星による可視画像と赤外画像とについて、観測対象と得られた画像の気象学的利用法について説明せよ。

(2) ラジオゾンデを用いた高層気象観測では、放球地点の高度と、気圧・温度・相対湿度の鉛直分布を測定することにより、等圧面高度 (ジオポテンシャルハイト) を計算している。その原理について説明せよ。

(3) 地球温暖化とヒートアイランド現象について説明し、気候変動の議論に際して注意すべき点について述べよ。

(4) 海洋の力学高度と力学高度から流れを求める方法をそれぞれ説明せよ。また、北太平洋の亜熱帯循環域での力学高度の分布の特徴を述べよ。

(5) 海洋の物理量を全球海洋でリアルタイムにモニタリングするための観測システム (人工衛星観測を含む) で、現在中心的に行われているものを 2 つ挙げ、どの物理量をどのような方法で測っているかを説明せよ。

(6) 潮汐で大潮・小潮という現象がある。これらはどのような現象かを説明し、大潮・小潮が生じる理由を述べよ。地球と月と太陽の位置関係の模式図などを用いてもよい。