北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成30年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3〜9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成29年8月

問題1：必答問題

問1 直交直線座標系 (x, y, z) におけるスカラー関数 $f = x^2 e^y \sin z$ に関して以下を求めよ。

(a) $\boldsymbol{F} = \nabla f$

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$

問2 以下の微分方程式を解け。

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - y = \cos x$

問3 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求め、$z = u + iv$ の形で記せ。ただし、u, v は実数、i は虚数単位である。

$$z^6 = 1$$

問4 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値、固有ベクトルを求めよ。

問題2： 必答問題

問 1 砲身の角度を水平から鉛直まで自由に変えることのできる大砲で、砲弾をまっすぐ上向きに発射したところ、砲弾が落ちてくるまでに時間 T だけかかった。砲弾の初速度の大きさは砲身の角度には依らない。また、砲口の高さはゼロと見做してよいとする。重力加速度の大きさを一定値 g とし、空気抵抗は無視する。以下の (a)、(b) に答えよ

(a) 砲弾の初速度の大きさを求めよ。

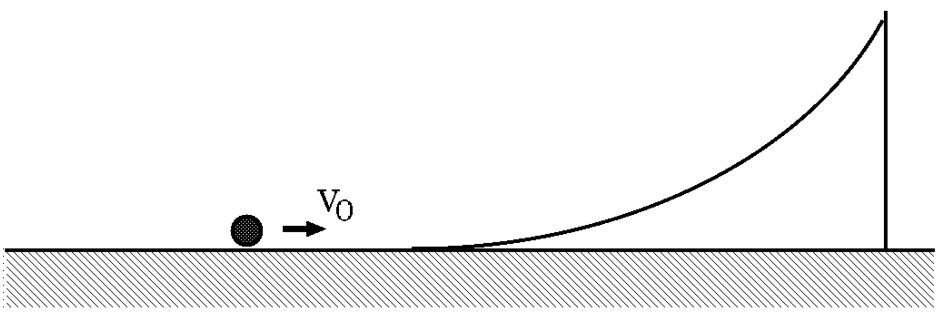
(b) 砲身の角度を変えて発射する。この大砲から発射される砲弾の水平方向の最大到達距離は幾らか。

問 2 水平な床の上に置かれた、図に示されているような斜面を持つ台と、台に向かう質点を考える。初期に台は静止しており、台の左側から斜面に向かう質点の速度は v_0 である。台と質点の質量は、両方とも m である。床面と斜面は滑らかに繋がっており、質点は床面と斜面に沿って移動する。質点には摩擦は働かず、また、質点は斜面の上端を越えることはないとする。重力加速度を g とし、以下の (a)~(c) に答えよ。

(a) 台が床に固定されている時に、質点が到達することが出来る最大の高さを求めよ。

(b) 床と台の間には摩擦がなく、台は床の上を自由に動けるとする。質点が最高点に達した時には台と質点の速度は一致する。その速度を求めよ。また、その時の質点の高さを求めよ。

(c) (b) で最高点に達した後、質点が床面まで降りてきた時の、質点と台の速度を求めよ。



問 3 -20°C の氷 1 kg に、単位時間あたり一定の熱を加えて、20°C の水とした。必要であった熱量はいくらか。また、この氷または水の温度の時間変化の概略図を示せ。なお、氷と水の比熱をそれぞれ 2×10^3 J kg^{-1} K^{-1}、4×10^3 J kg^{-1} K^{-1} とし、氷の融解熱を 3.2×10^5 J kg^{-1} とせよ。

問題３： 選択問題・数学

偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1}$$

で、

$$f = f(X), \quad X = x - ct \tag{2}$$

という形の解を考える。ここで κ は正の定数、c は定数である。以下の問に答えよ。

問 1 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ を X の微分で表せ。

問 2 X へ変数を変換し、積分することにより、方程式 (1) は

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 = \kappa \frac{df}{dX} + D \tag{3}$$

と変換できることを示せ。ただし D は積分定数である。

問 3 境界条件として

$$x \to -\infty \quad \text{で} \quad f \to a, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \to 0, \tag{4}$$

$$x \to +\infty \quad \text{で} \quad f \to b, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \to 0 \tag{5}$$

を考える。ここで $a,\ b$ は定数で $a > b$ とする。方程式 (3) が

$$-(a-f)(f-b) = 2\kappa \frac{df}{dX} \tag{6}$$

と書けることを示せ。

問 4 方程式 (6) を f について解き、$x,\ t$ を用いて表せ。その際、$a > f > b$ を用いてよい。

問 5 問 4 で得られた解を $x \to \pm\infty$, $X = x - ct = 0$ における値とともに図示せよ。

問題 4： 選択問題・数学

関数 $f(x_1, x_2, \ldots)$ の極値を条件 $g(x_1, x_2, \ldots) = 0$ のもとで求めることを考える。以下の問に答えよ。

問 1 $f(x, y) = x^2 + y^2,\ g(x, y) = x + y - 1$ の場合に次の (a)〜(c) に答えよ。ただし、$x,\ y$ は実数である。

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ に $y = 1 - x$ を代入することにより、条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の最小値とそのときの座標 (x_0, y_0) を求めよ。

(b) (x, y) 平面上に $f(x, y) = a^2$ と $g(x, y) = 0$ をそれぞれ図示せよ。そして、この 2 つの方程式を同時に満たす $x,\ y$ が存在する場合、a が最小値をとるのは、2 つの図形が接するときであることを、図を用いて説明せよ。また、a の最小値を、図を用いて求めよ。

(c) $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ とする。

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

を同時に満たす (x, y) は、(a) で求めた (x_0, y_0) と等しいことを示せ。また、(x_0, y_0) において $f =$ 一定 と $g = 0$ が接していること（すなわち、 ∇f と ∇g が平行であること）を示せ。ここで、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ である。

問 2 問 1(c) の方法を用いて、条件 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - 1 = 0$ のもとで、$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ の最小値を求めよ。ただし、$x_1, \ldots, x_n$ はすべて実数である。

問題 5： 選択問題・物理学

長さ l の伸縮しない質量ゼロの糸の下端に質量 m の質点を付けた振り子を考える。下図のように糸を鉛直線から傾け、質点を水平面内で円を描くように回転させる。このような振り子を円錐振り子という。糸が鉛直線となす角度を θ とする。重力加速度の大きさを g とし、以下の問に答えよ。

問 1 質点が描く円の半径 r を l と θ で表せ。

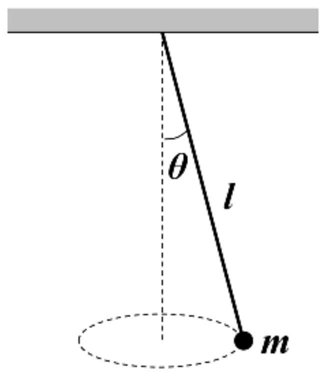
問 2 この円錐振り子の周期を求めよ。

問 3 質点が描く円の中心に対する質点の角運動量の大きさを求めよ。

問 4 以下では簡単のため、糸と鉛直線のなす角 θ は十分に小さく、$\sin\theta = \theta,\ \cos\theta = 1$ と近似できるとする。糸の長さ l_0 で半径 r_0 の円運動を行なっている状態から、糸の長さをゆっくりと l_1 まで変化させた。変化させた後の、水平面内での円運動の半径を求めよ。

問 5 問 4 における、糸の長さを l_1 まで変化させた後の円運動における質点の運動エネルギーと、糸の長さ l_0 で半径 r_0 の円運動を行なっていた時の質点の運動エネルギーの差を求めよ。この差はどのような仕事によってもたらされたか。

問 6 問 5 の仕事を実際に計算し、運動エネルギーの差に一致することを示せ。



問題6：選択問題・物理学

熱機関とは、ある作業物質を用いて、熱を仕事に変える機関である。作業物質の状態を変化させ仕事をさせた後に機関を元の状態に戻す、というサイクルを繰り返す。以下の問に答えよ。

問1 身近な熱機関の例をふたつ挙げよ。

問2 熱機関において、作業物質は高温（T_h）の熱源から熱 Q_h（$Q_h > 0$）を受け取り、外部に正味の仕事（$W_{\mathrm{tot}} > 0$）をし、低温（T_l）の熱源に熱 Q_l（$Q_l > 0$）を放出することで、もとの状態に戻り、1 サイクルを終える。この時、この熱機関の効率 η を $\eta = W_{\mathrm{tot}}/Q_h$ と定義する。η を Q_h と Q_l で表せ。

問3 理想気体 1 mol を作業物質とし、次のような状態 1、2、3、4 を経て状態 1 に戻すような熱機関を考える。なお、すべての過程は準静的であるとする。

- 過程 A: 状態 1 から、温度 T_h の高温熱源から熱 Q_h を与え、状態 2 まで等温で膨張させる。（状態 1、2 ともに温度は T_h である。）
- 過程 B: 状態 2 から、断熱的に膨張させ、温度 T_l の状態 3 とする。
- 過程 C: 状態 3 から、温度 T_l の低温熱源へ熱 Q_l を捨てさせ、状態 4 まで等温で収縮させる。
- 過程 D: 状態 4 から、断熱的に圧縮し、温度 T_h の状態 1 に戻す。

(a) 各過程における、内部エネルギー変化 ΔU、外部から得る熱 Q、外部への仕事 W、作業物質のエントロピー変化 ΔS、熱源のエントロピー変化 $\Delta S'$ を、状態量を用いて答えよ。計算の根拠も示すこと。なお、モル気体定数を R、定積モル比熱を C_v、定圧モル比熱を C_p、$\gamma = C_p/C_v$ とする。断熱過程においては、pV^γ と $TV^{\gamma-1}$ がそれぞれ一定であること（p: 圧力、V: 体積、T: 温度)、を用いてよい。必要な状態量は適宜定義して用いよ。

(b) この熱機関の効率が $\eta = 1 - (T_l/T_h)$ となることを、(a) の結果を用いて導け。

(c) この熱機関のサイクルを、横軸に作業物質のエントロピー、縦軸に温度をとって、図示せよ。また、経路で囲まれた領域の面積は何をあらわすか述べよ。

(d) この熱機関の物理的な特性を、エントロピーの変化に着目して解説せよ。

問題７： 選択問題・地球物理学

x, y, z をそれぞれ東、北、鉛直上方を向いた座標に取り、x, y, z 方向の速度成分をそれぞれ u, v, w とするとき、以下の問に答えよ。

問 1 高層天気図は、等圧面の高度分布により表される。図 1 は、上が 1 月の北半球、下が 7 月の南半球における 500 hPa 等圧面の月平均高度分布である。背景の地図の陸地部分は地表の高度を濃淡で表しており、色が濃いほど標高が高いことを表す。

(a) 地衡風の定義を 30 字以内で述べよ。また、高層天気図において地衡風の風向や風速分布はどのように読みとれるか、50 字程度で説明せよ。

(b) 図 1 から読みとれる地衡風の特徴について、北半球と南半球の共通点と相違点を簡潔にまとめよ。

(c) 気圧座標系における地衡風の東西成分 u は、

$$fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

で表される。ここで、f はコリオリパラメータ、Φ はジオポテンシャルである。Φ が重力加速度の大きさ g と等圧面高度 Z を用いて $\Phi = gZ$ と表されることを利用し、本州東方海上の北緯 35 度、東経 150 度付近の東西風速を計算せよ。ただし、$g = 10$ m s^{-2}, $f = 10^{-4}$ s^{-1} とせよ。

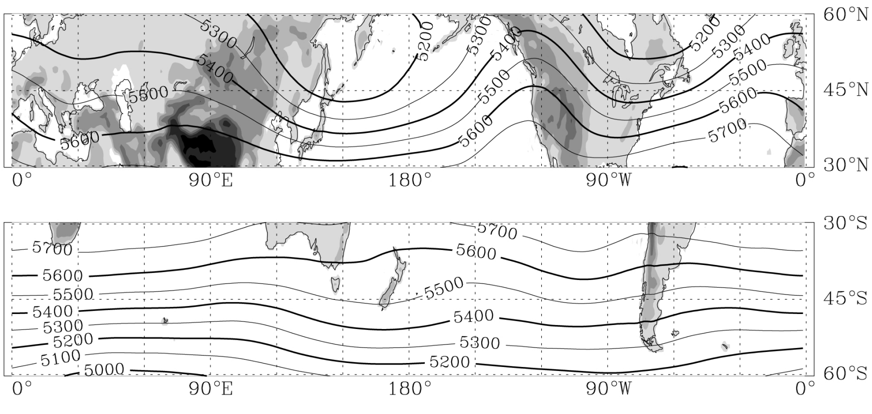


図 1: 500 hPa 等圧面の月平均高度分布 (m)。(上) 1 月の北半球、(下) 7 月の南半球。陸地の色の濃淡は標高を表す。ヨーロッパ中期予報センター公開のデータに基づいて作図。

問 2 図 2 は、北半球において西風が山を越えて流れてゆく様子の模式図で、地形の影響を受けて流体の厚さが変化している様子が示されている。

(a) 相対渦度 ζ を

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

により定義する。北半球の高低気圧に対応して ζ の符号がどのように定まるか説明せよ。

(b) ポテンシャル渦度 (渦位) P は $P = \dfrac{\zeta + f}{h}$ により定義される。ここで、ζ は相対渦度、f はコリオリパラメータ、h は流体の厚さである。図 2 において山の十分上流側で $\zeta = 0$ であるとし、流れに沿ってポテンシャル渦度 P が保存するとき、山を越えて下流側へ流れる際に ζ の符号はどのように変化するか。図 2 の概略を解答用紙に書き写し、その図に ζ の符号変化を書込め。また、水平面上に射影した流体の軌跡はどのようになるか。ζ の符号変化と対応させて図示せよ。

(c) 問 2(b) の考察に基づき、図 1 について指摘した北半球と南半球との違いが生じた原因の一つとして考えられる物理的背景について説明せよ。

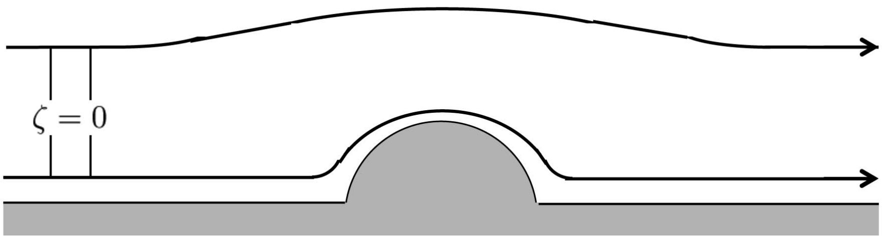


図 2: 山を越える気流の模式図。流体は 2 本の曲線で挟まれた領域を通過するとして考察する。

問題８： 選択問題・地球物理学

図１は、人工衛星に搭載した赤外放射計によって観測された日本周辺海域の海面水温分布の一例である。以下の問に答えよ。

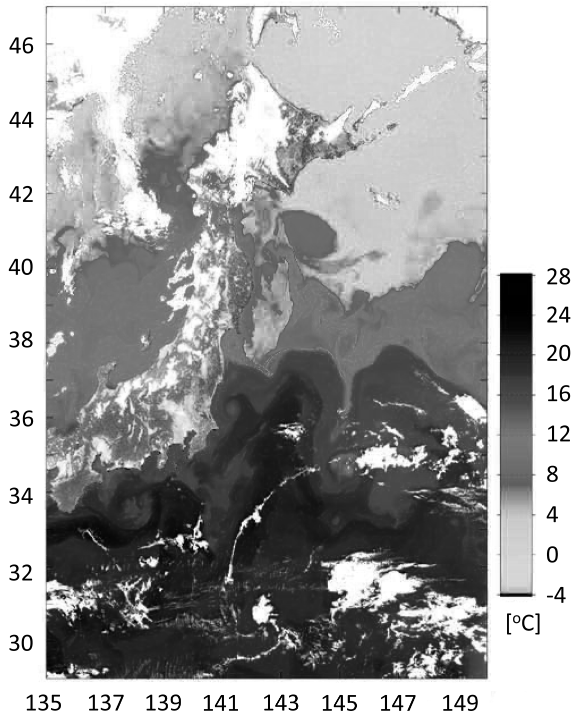


図 1: 衛星搭載赤外放射計で観測された日本周辺海域の海面水温分布の一例。縦軸の数字は緯度、横軸の数字は経度を表す。JAXA EORC ホームページより転載・修正。

問１ 衛星搭載赤外放射計による海面水温観測の原理を、以下の３つのキーワードを全て使って（順序は問わない）、５行程度で述べよ。

キーワード：「ステファン・ボルツマンの法則」、「射出率」、「放射輝度」

問２ 今までに赤外放射計を搭載して海面水温観測を行った人工衛星とその赤外放射計の名称をそれぞれ１つ挙げよ。ただし、衛星および赤外放射計の名称は、略号や愛称でも構わない。

問３ 衛星搭載赤外放射計によって観測された放射輝度温度は、大気による吸収・散乱の影響によって、実際の海面水温より低くなることが知られている。この大気の影響を取り除くためにどのような手法が使われているか、３行程度で述べよ。

問４ 夏季の昼間、風が弱い時には、衛星搭載赤外放射計で観測された海面水温は、図１に見られるような暖流、寒流、渦、前線などの海洋構造を反映したパターンを示さないことがある。その原因について、３行程度で述べよ。

問 5 人工衛星に搭載して海面水温を観測するセンサとして、赤外放射計の他に、マイクロ波放射計が挙げられる。海面水温観測において、赤外放射計が、マイクロ波放射計に対して、有利な点、および不利な点について、合わせて 3 行程度で述べよ。

問題9：選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) 傾圧不安定波の性質を調べる回転水槽実験装置について述べ、実験条件とその条件下で生じる流れの場の概要を説明せよ。

(2) 地球温暖化を引き起こす要因の比較において用いられる放射強制力について説明せよ。

(3) 豪雨を引き起こすことが知られている線状降水帯について説明せよ。

(4) 全球海洋の 3 次元循環像を模式的に示すものの一つとして、「ブロッカーのコンベアーベルト」と呼ばれる循環像がよく知られている。この循環像の概略について説明せよ。

(5) 夏季、亜寒帯海域の海洋上層下部には、その上下の層よりも水温の低い「中冷水」と呼ばれる水が存在することがある。その成因について述べよ。また、亜熱帯海域には中冷水が存在しない理由について記せ。

(6) 沿岸域の潮位の予報（満潮・干潮の時刻や大潮・小潮の時期など）は、どのような方法によって行われているか、説明せよ。