北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 29 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 29 年 2 月

専門・問題 1

問 1 以下の問に答えよ。

(a) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

(b) 上の方程式の解で、次の条件を満たすものを求めよ。

$$y(1) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y = 0$$

問 2 i を虚数単位、r, θ, a, b は実数とする。以下の問に答えよ。

(a) 複素数 $z = re^{i\theta}$ を $z = a + bi$ の形で表せ。

(b) 複素数 $w = -4i$ の 2 乗根を求め、$a + bi$ の形で表せ。

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) を考える。以下を求めよ。ただし、a, b, c は定数とする。

(a) スカラー関数 $f = \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{y} + \log z\right)\exp[ax + by^2]$ の勾配

(b) ベクトル関数 $\boldsymbol{G} = (-cy\cos z, cx\cos z, 0)$ の回転

問 4 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

専門・問題2

問1 質量 M の自動車が速さ v で水平面上の半径 r のカーブを曲がる。道路とタイヤの静止摩擦係数（タイヤに直交する向きを考える）を μ とし、横方向に滑らないでカーブを曲がることができる最大の速さを考える。重力加速度の大きさを g とする。以下の問に答えよ。

(a) カーブを曲がるときの向心力の大きさを表す式を書け。

(b) (a) の向心力が最大静止摩擦力と等しい時に横方向に滑らないでカーブを曲がる最大の速さがでることから、この最大の速さを求めよ。

(c) 静止摩擦係数 μ が、乾いた路面では 0.8 であり、雪面では 0.2 であるとすると、この 2 つの場合の最大の速さの比はどうなるか。

問2 1 モルの理想気体に図 1 の $p-V$ 図にあるようなサイクル ABCDA を行わせる（p は圧力、V は体積である）。ここで、各状態の圧力、温度、体積は、A が p_1, T_1, V_1、B が p_1, T_2, V_2、 C が p_2, T_3, V_2、D が p_2, T_4, V_1 とする。以下の問に答えよ。ただし、気体定数を R、定積モル比熱を C_v、定圧モル比熱を $C_p = C_v + R$ とする。

(a) A $\rightarrow$ B, B $\rightarrow$ C, C $\rightarrow$ D, D $\rightarrow$ A の各過程において外部から吸収する熱量、外部へする仕事を求めよ。

(b) (a) で求めた外部から吸収する熱量と外部へする仕事がサイクル ABCDA について等しく、それが図 1 の長方形 ABCD の面積と等しくなっていることを示せ。

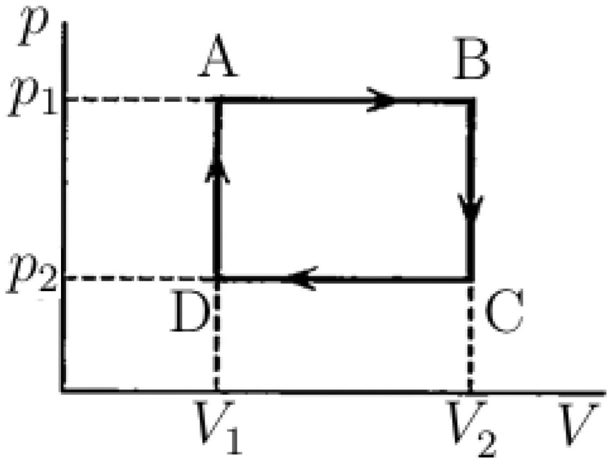

図 1

専門・問題 3

問 1 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

について以下の問に答えよ。

(a) $f = \cos(x - t)$ は式 (1) を満たす解であることを示せ。

(b) $g(\xi)$, $h(\xi)$ を 2 階微分可能な任意関数とすると、

$$f = g(x - t) + h(x + t) \tag{2}$$

は式 (1) を満たす解であることを示せ。

(c) 解 (2) について $t = 0$ で $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ となる条件を g, h を使って表せ。

(d) $t = 0$ で $f = \sin \alpha x$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ となる式 (1) の解を求めよ。ここで α は定数である。

(e) $x = 0$ および $x = \pi$ で任意の t について $f = 0$ となり、$0 \leq x \leq \pi$, $t = 0$ で $f = x(\pi - x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ となる式 (1) の解を考える。この解の $t = \pi$ における値を x の関数として表せ。なお、$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で連続で、両端で 0 となる関数は、$\sin nx$ (n は自然数) のみによるフーリエ級数で表せると仮定して良い。

問 2 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f = 0$$

について、$t = 0$ で $f = \sin \alpha x$, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ となる解を求めよ。

専門・問題 4

半径 a、質量 M の球がすべらずに速度 v で水平な床を転がり、下の図 1 のように高さ h の段にぶつかって、段にのったところで静止した。このような状態になる v を求めることを考える。下の文章の空欄に当てはまる適切な式を記せ。ただし、球の密度は一様である。また、球が角 A にぶつかってから段をのぼるまでの間、球は角から離れず、かつ、すべらないものとする。重力加速度の大きさは g である。解答用紙には、計算および思考の過程も記すこと。

球は角 A にぶつかると、角 A のまわりを回転しながら段にのぼる。この回転の、衝突直後の角速度を ω とすると、エネルギーの保存より、ω と h の間に $(I_0+Ma^2)\omega^2/2 = \boxed{\ 1\ }$ の関係がある。ここで I_0 は球の重心まわりの慣性モーメントで、$I_0 = 2Ma^2/5$ である。

つぎに、角運動量の保存を用いて ω と v の関係を求めよう。衝突前、床を転がっているときの球の重心まわりの角速度は、v と a を用いて $\boxed{\ 2\ }$ と書ける。衝突直前の角 A まわりの角運動量は、球の重心まわりの角運動量 $\boxed{\ 3\ }$ と重心の運動に対する角 A まわりの角運動量 $\boxed{\ 4\ }$ の和であり、これが衝突直後の球の回転運動に対する角 A まわりの角運動量 $\boxed{\ 5\ }$ に等しい。

以上のエネルギー保存と角運動量保存より、段上でちょうど静止する v について h, a, g を用いて書くと、v=$\boxed{\ 6\ }$ となる。

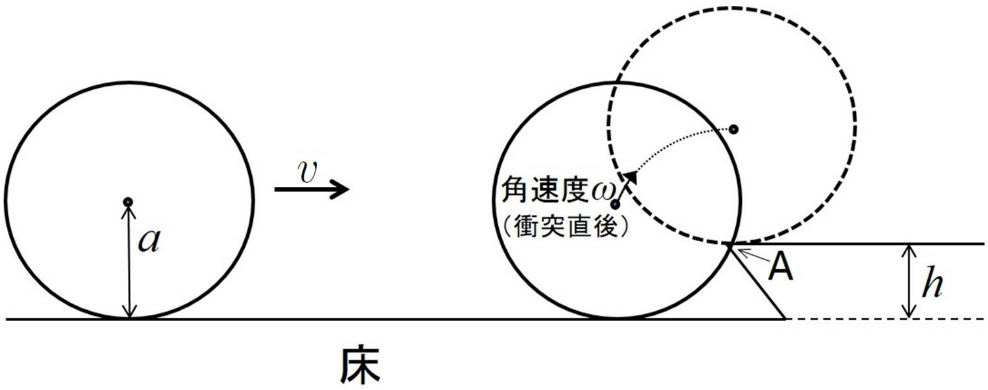

図 1