

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 29 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題 1 と 2 は必答問題、問題 3~9 は選択問題である。必答問題 2 問は必ず解答すること。選択問題は、数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問、計 7 問出題されている。その中から 2 問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 28 年 8 月

問題 1 : 必答問題

以下の問に答えよ。

問 1 3次元空間における位置ベクトルを r 、任意の定ベクトルを a とするとき、次の (a) ~ (c) を求めよ。

(a) $\nabla \cdot r$

(b) $\nabla \cdot (a \times r)$

(c) $\nabla \cdot \{a \times (r \times a)\}$

問 2 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

問 3 次の初期値問題 (a), (b) の解を求めよ。

(a) $\frac{dx}{dt} + x = 0, x(0) = 1$

(b) $\frac{dx}{dt} + x = 2t, x(0) = 0$

問 4 次の式を満たす複素変数 $z = x + iy$ の範囲を、 x - y 平面上で図示せよ。ただし、 x と y は実数、 i は虚数単位とし、 $\text{Re}[\]$ は複素数の実部を表すものとする。

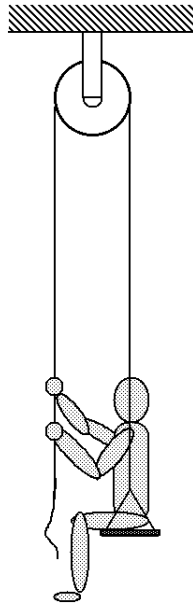
(a) $|z - 2| \leq 2$

(b) $\text{Re}[z^2] \leq 1$

問題 2 : 必答問題

以下の問に答えよ。

- 問 1 図のように、紐の付いた台に座り、滑車にかかった紐を手繰って、ゆっくりと自分を持ち上げるとする。この人の体重は 80 kg である。持ち上げるのに必要な最小の力はいくらか。紐と台の重さは無視する。重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とする。



- 問 2 質量 M の貨物室と質量 m の居住区からなる外力を一切受けていない宇宙船を考える。貨物室で非常事態が生じたため、貨物室を切り離すこととした。切り離しは、貨物室と居住区の間で火薬を爆発させることによって行った。火薬による爆発のエネルギーは E であり、そのエネルギーは、すべて、貨物室と居住区の加速に費やされたとする。なお、以下では、貨物室と居住区からなる系の重心とともに動く座標系で考えよ。

- (a) 切り離し後の貨物室と居住区からなる系の (系の重心に相対的な速度から計算される) 運動エネルギーはいくらか。
- (b) 切り離し後の貨物室は居住区から見てどれだけの速さで遠ざかっていくか。

- 問 3 圧力 p_0 、温度 T_0 の環境中に置かれた容積 V のコック付き容器に、圧力 p_1 、温度 T_0 の気体を満たす。気体はすべて理想気体とみなすことができるものとする。

- (a) $p_1 > p_0$ のとき、コックを開いて中の気体を噴出させると、容器内の気体の温度は上がるか、下がるか、変わらないか。理由を付けて答えよ。
- (b) $p_1 < p_0$ のとき、コックを開いて容器内に外気を取込むと、容器内の気体の温度は上がるか、下がるか、変わらないか。理由を付けて答えよ。

- (c) (b) の操作後、容器内の圧力が外気圧 p_0 と等しくなったら直ちにコックを閉じた。しばらくすると容器内の気体が圧力 p_2 、温度 T_0 になった。容器に採取された外気は何モルか。気体定数を R として答えよ。

問題 3 : 選択問題・数学

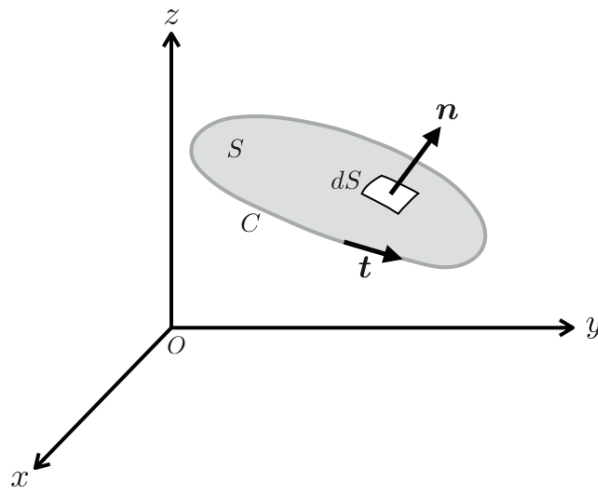
以下は、直交直線座標系 (x, y, z) のベクトル場 $A(x, y, z)$ に関する 2 つの定理の説明である。以下の問に答えよ。

定理 1 :

この座標系における閉曲面 S の内部領域を V とする。このとき、 A と S 上の外向きの単位法線ベクトル n との内積の S 全体における面積分は、 A の発散の V 全体における体積分と等しい。

定理 2 :

図のように、閉曲線 C を境界線とする曲面 S をとる。このとき、 A と C 上の単位接線ベクトル t との内積の C 全体に沿った線積分 (積分方向は図中の矢印のように取る) は、 A の回転と S 上の単位法線ベクトル n との内積の S 全体における面積分と等しい。



問 1 曲線の微小線分を ds 、曲面の微小面積を dS 、内部領域の微小体積を dV として、定理 1 と定理 2 をそれぞれ式で表せ。

問 2 直交直線座標系 (x, y, z) 上の球 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の表面を S_1 とする。このとき、定理 1 を用いて、 n と ∇f との内積の球面全体における面積分を求めよ。

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) 上で、 $z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0$ として表される面を S_2 、 S_2 と xy 平面でつくる円を C_2 とする。ベクトル場 $A_2 = (z, x, y)$ とするとき、定理 2 が成り立つことを確かめよ。

問題 4 : 選択問題・数学

関数 $f(t)$ に対して $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ が存在するとき、 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換と呼び、 $L\{f\}$ で表す。ここで $s > 0$ である。以下の問に答えよ。

問 1 $L\{e^{at}\}$ を求めよ。ただし、 a は定数で、 $s > a$ とする。

問 2 $L\{\sin at\}$, $L\{\cos at\}$ (a は定数) を求めよ。

問 3 関数 f の 1 階および 2 階微分を、それぞれ、 f' , f'' とする。 f および f' が、
 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f = 0$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f' = 0$ を満たすとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$(a) L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

$$(b) L\{f''\} = s^2 L\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

問 4 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = 0, \quad x(0) = b, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

の解は $x = b \cos at$ である。このことを上式の両辺をラプラス変換し、問 1~3 の結果を用いることによって示せ。

問題 5 : 選択問題・物理学

以下の問に答えよ。

問 1 長さ l 、質量 m の一様な細長い棒の一端を摩擦のない支点から吊り下げている振り子を考える (図 1)。振り子の運動は図 1 の紙面に含まれる平面内に限られるとする。また、重力加速度の大きさを g とする。

- (a) 支点に対する棒の慣性モーメント I を求めよ。
- (b) 鉛直線と棒のなす角度を θ とする。棒の振り子運動の方程式を記せ。
- (c) $|\theta|$ が十分に小さいとして、この振り子の振動数を求めよ。

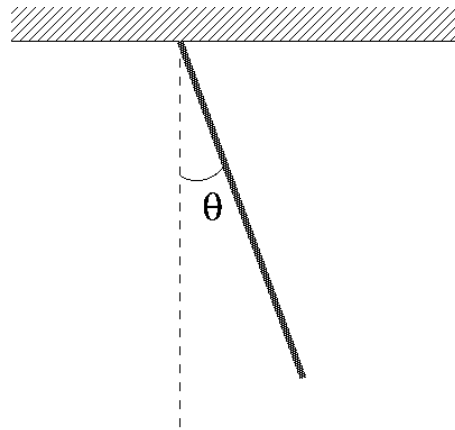


図 1

問 2 長さ l 、質量 m の一様な細長い 2 本の棒のそれぞれの一端を摩擦のない支点から吊り下げ、両者の下端を重さのないバネでつないだものを考える (図 2)。静止状態における二つの棒の間隔はバネの自然長と一致し、バネはバネ定数 k でフックの法則に従うとする。左と右、それぞれの棒と鉛直線とのなす角度を θ_1 、 θ_2 とする。 $|\theta_1|$ と $|\theta_2|$ が十分に小さい場合のみを考える。また、2 本の棒とバネは図 2 の紙面に含まれる同一平面内にあり、運動はその平面内に限られるとする。重力加速度の大きさを g とする。

- (a) θ_1 と θ_2 を用いて、それぞれの棒の運動を支配する方程式を記せ。
- (b) (a) で求めた 2 つの方程式の和と差を取ることによって 2 つの基準振動に関する方程式を導け。また、2 つの基準振動数を求めよ。
- (c) それぞれの基準振動における振動の仕方 (θ_1 と θ_2 の関係) を述べよ (図を用いても良い)。

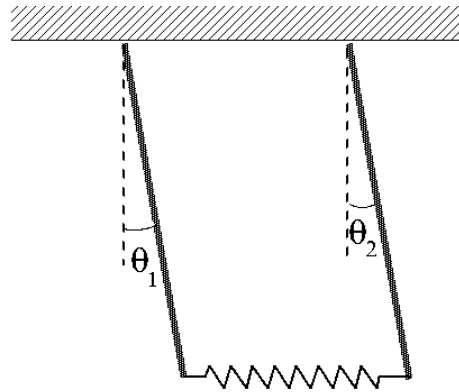


図 2

問題 6 : 選択問題・物理学

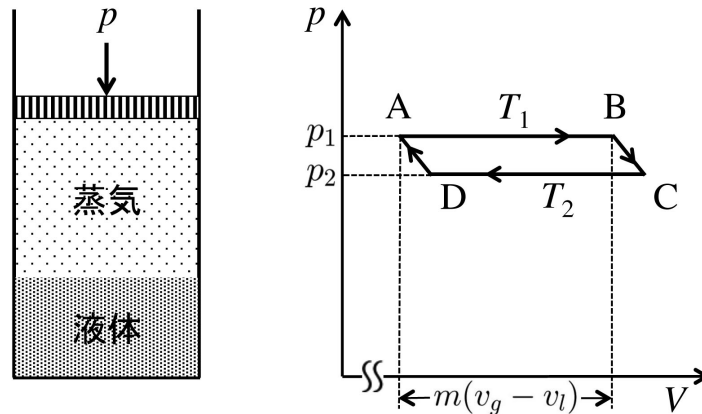
ある物質の液相と気相とが分離した状態で容器内に閉じ込められている(下図左)。この系が飽和状態にあるとき、その圧力 p (飽和蒸気圧) は温度 T の関数で表される。次の過程(下図右の p (圧力)– V (体積) 図を参照)で定義されるカルノー・サイクルを考察することにより、以下の問に答えよ。ただし、気体は理想気体とみなすことができるものとし、 v_g と v_l は、この物質の、それぞれ気体状態および液体状態での単位質量当たりの体積である。

過程 A→B: 高温熱源から吸収した熱 Q_2 により、温度 T_1 と圧力 p_1 を一定に保ちながら液体を微小な質量 m だけ蒸発させる。

過程 B→C: 圧力 p_2 、温度 T_2 の状態へと断熱膨張させる。

過程 C→D: 低温熱源へ熱 Q_1 を放出することにより、温度 T_2 と圧力 p_2 を一定に保ちながら蒸気を質量 m だけ凝結させる。

過程 D→A: 圧力 p_1 、温度 T_1 の状態へと断熱圧縮する。



- 問 1 過程 A→B で系に与えられた熱量 Q_2 を、圧力 p_1 、温度 T_1 における単位質量当たりの潜熱 L と m の式で表せ。
- 問 2 系が外部に対してなした仕事 W は、図形 ABCDA の面積で表される。 $\Delta T \equiv T_1 - T_2$ が十分小さいとき、図形 ABCDA が平行四辺形で近似できることに注目し、 W を $\Delta p \equiv p_1 - p_2$ 、 m 、 v_g 、 v_l の式で表せ。
- 問 3 このカルノー・サイクルを一巡させたとき、作業物質のエントロピーは変化しない。この事実は、 T_1 、 T_2 、 Q_1 、 Q_2 の式としてどのように表されるか。
- 問 4 このカルノー・サイクルの熱効率 η は、与えられた熱 Q_2 に対する外部へなした仕事 W の比 W/Q_2 で定義される。 η を T_1 と ΔT の式で表せ。

問 5 以上の考察に基づき、クラウジウス・クラペイロンの式

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(v_g - v_l)}$$

を導け。

問題 7：選択問題・地球物理学

大気のエネルギー収支に関する以下の問に答えよ。

問 1 図 1 は、全球の平均的なエネルギー収支を示したものである。数値は、各エネルギーフラックスの大きさを $W m^{-2}$ であらわしたものである。図中の (a)、(b)、(c)、(d) について、以下の問に答えよ。

- (a) 反射された太陽放射量（短波放射量）はいくらと見積もられるか。 $W m^{-2}$ の単位で答えよ。また、反射をもたらす大気中の物体を 2 つ挙げよ。
- (b) 図中の (b) は H_2O による地表から大気へのエネルギー輸送の過程をあらわしている。具体的にどのような過程か、50 字程度で説明せよ。
- (c) 地表が大気から受け取る長波放射量は、太陽から受け取る短波放射量よりも大きい。このような長波放射をもたらす過程を 20 字程度で答えよ。また、これに主として関わる大気成分を 3 つ挙げ、それぞれの収支を支配する過程を挙げよ。
- (d) 赤外線波長の $8-12 \mu m$ の領域は、「大気の窓」や「窓領域」と呼ばれる。なぜそのように呼ばれるのか 20 字程度で説明せよ。また、人工衛星観測では、この領域をどのように活用できるか、50 字程度で説明せよ。

問 2 図 2 は、大気上端における正味の太陽放射量（地球が吸収した太陽放射量）と正味の長波放射量（地球から出ていく赤外放射量）の緯度分布図である。5 年間の平均である。図 1 の全球平均では両者はつりあっていたが、図 2 によると、低緯度では前者が後者より多く、高緯度では後者が前者より多い。この放射のつりあいはどのようにして維持されているか、50 字程度で述べよ。

問 3 全球平均の地表気温は、過去 100 年で $0.7^\circ C$ 程度上昇したことが知られている。その主な原因として考えられることを、図 1 を参照しながら 50 字程度で解説せよ。

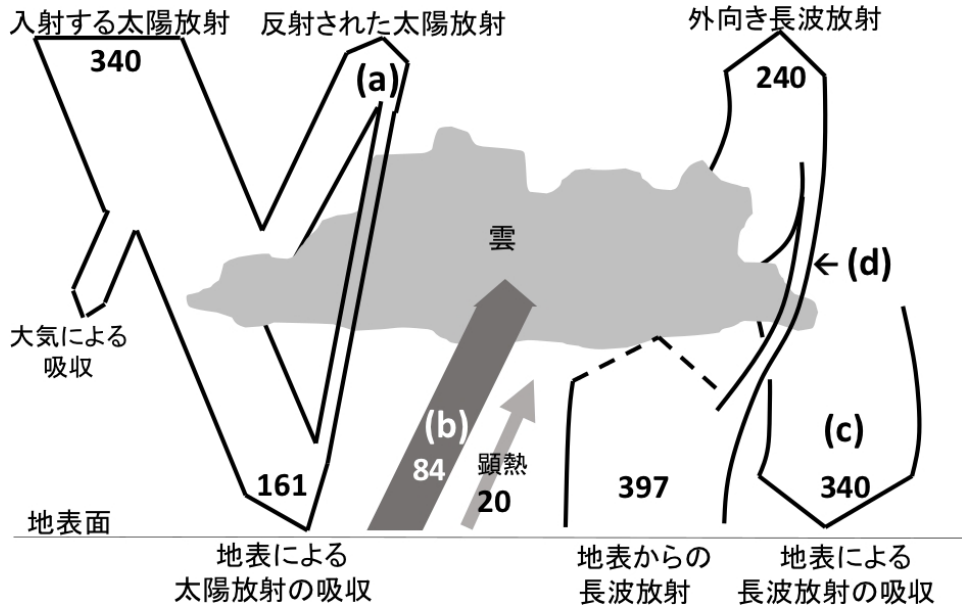


図 1: 全球平均の地球のエネルギー収支。数値の単位は W m^{-2} である。

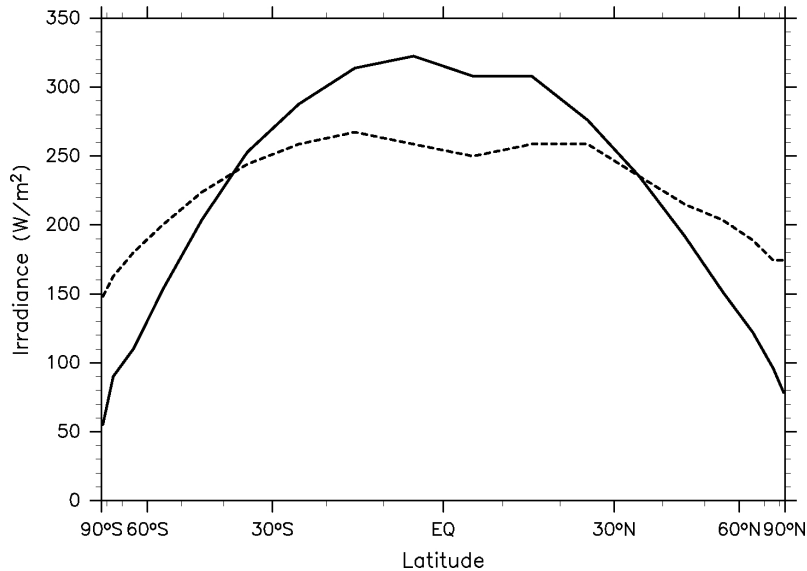
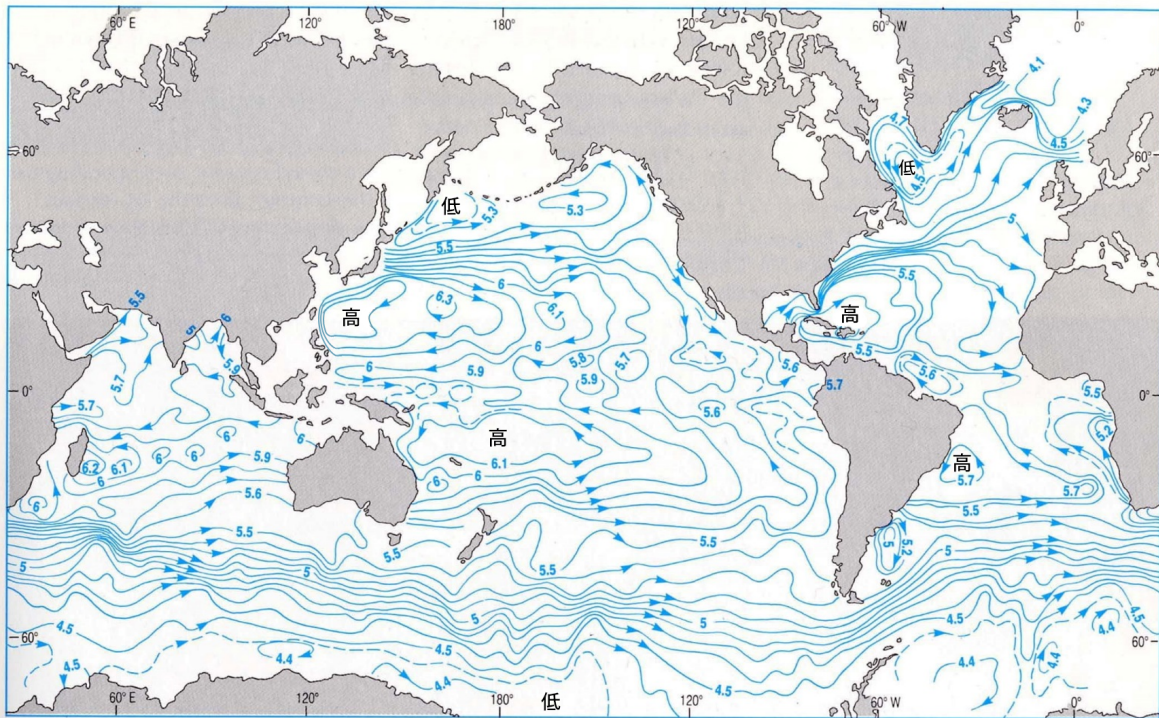


図 2: 大気上端における正味の太陽放射量（地球が吸収した太陽放射量）(実線)と正味の長波放射量（地球から出ていく赤外放射量）(点線)の緯度分布。5年間の平均。

問題 8 : 選択問題・地球物理学

下図は、1500 dbar を基準 (無流面) とした全球海洋の力学高度 (Dynamic height) の分布を示したものである。力学高度分布からは矢印に示したように表層の流速分布がわかる。以下の問に答えよ。

- 問 1 知っている海流を 3 つあげ、それらが存在する海域を記せ。ただし、この力学高度分布から読み取れるものに限る。
- 問 2 力学高度分布から流速がわかるのは、ある 2 つの力がバランスするという仮定に基づいている。その 2 つの力とは何か。また、そのバランスする関係を何というか。この関係から、流速の大きさは何によって決まるか。
- 問 3 力学高度はどのようにして求められるか、求めるのに必要な物理量と、その求め方を簡潔に述べよ。
- 問 4 力学高度分布からわかる、太平洋、大西洋、南大洋の循環の特徴をそれぞれ述べよ。
- 問 5 北太平洋、北大西洋の西側岸付近では強い流れが生ずる。この強い流れが生ずるメカニズムを 100–200 字程度で述べよ。



(単位は dynamic meters)

(The Open University: Ocean Circulation, Pergamon Press の図を加筆・修正)

問題 9 : 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 台風やサイクロンやハリケーンなどの熱帯低気圧について、発生・発達する地域に共通する特徴を述べ、なぜそのような地域で発生・発達するのか説明せよ。
- (2) エルニーニョ・南方振動 (ENSO) とはどのような現象か、説明せよ。
- (3) 温帯低気圧の寒冷前線と温暖前線の付近における天気の特徴を説明せよ。
- (4) 海洋中の内部ケルビン波について、その伝播方向、捕捉されるスケール、発生するメカニズムなどを含めて、説明せよ。
- (5) 一般に、新月と満月の時には、潮汐による潮位変動が大きくなる傾向にある。その理由を説明せよ。
- (6) 海氷の融解期に海氷と海洋のアルベドの違いによって生じる正のフィードバック効果を説明せよ。