

北海道大学大学院環境科学院  
地球圏科学専攻  
大気海洋物理学・気候力学コース

平成28年度大学院修士課程入学試験問題  
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3~9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成27年8月

**問題 1 : 必答問題**

問 1 以下の定積分 (a), (b) を求めよ。

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$$

$$(b) \int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x} \, dx$$

問 2 次の式を満たす複素数  $z$  の実部と虚部を求めよ。ただし、虚数単位を  $i$  とする。

$$(a) e^z = 1 + i$$

$$(b) z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3i\right)$$

問 3 直交直線座標系  $(x, y, z)$  におけるベクトル  $\boldsymbol{v} = \left( (a + ib)e^{i\phi}, (b - ia)e^{i\phi}, \frac{(a^2 + b^2)}{c}e^{i\phi} \right)$ ,  $\phi = ax + by + cz$  に関して以下の (a), (b) を求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位、 $a, b, c$  は実数とする。

$$(a) \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

$$(b) \nabla \times \boldsymbol{v}$$

問 4 以下の境界値問題を解け。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

## 問題 2 : 必答問題

以下の問に答えよ。

問 1 図 1 に示すように崖の上に質量  $M$  の大砲を置き、静止した状態で、質量  $m$  の弾を水平に発射する。崖の下の地面から大砲までの高さは  $H$  であり、大砲から発射された時の大砲に相対的な砲弾の速さを  $V_0$  とする。重力加速度の大きさを  $g$  とし、空気抵抗は働かないと仮定する。

- (a) 大砲が地面に固定されているときの、砲口から着弾点までの水平距離を求めよ。
- (b) 大砲と地面の間には摩擦がなく、大砲は水平に自由に動けるとする。砲口から着弾点までの水平距離を求めよ。

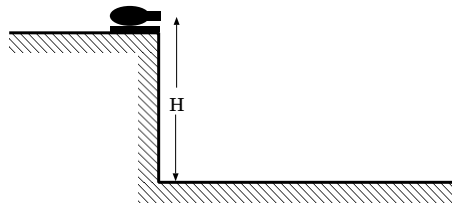


図 1

問 2 図 2 に示す滑り台を考える。A 点から小さな物体を初速度ゼロで滑らせた。滑り台は B 点より先では半径  $R$  の円弧を描き、ある速度よりも速ければ、物体は、円弧部分でも落下することなく、(図中の矢印に沿って) 下面を回って一回りして降りてくることが出来る。B 点からの A 点の高さは  $h$ 、滑り台と物体の間には摩擦は働かず、また、この滑り台はほぼ同じ鉛直面内に存在する。重力加速度の大きさを  $g$  とする。

- (a) B 点での物体の速さを求めよ。
- (b) 物体が途中で落下することなく円弧部分を通過し、滑り終えるには、 $h$  はいくら以上必要か？

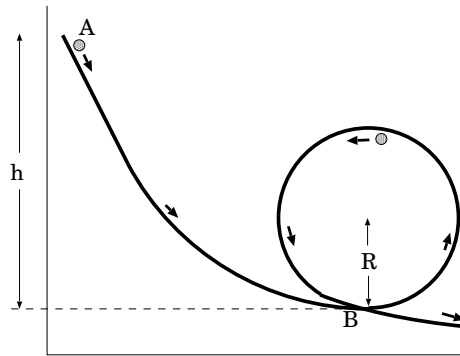


図 2

問 3 以下の熱に関わる基礎的な事柄について答えよ。

- (a) 同じ物質で作られた 2 つの物体を考える。物体 1 は質量  $M_1$  で温度  $T_1$ 、物体 2 は質量  $M_2$  で温度  $T_2$  であった。両者を接触させ、十分に時間が経った後、両者の温度は同じになった。その温度を求めよ。ただし、両物体間以外での熱のやり取りはないとする。
- (b)  $273^{\circ}\text{C}$  の物体が単位時間当りに放射する電磁波のエネルギーは、同じ物体が  $0^{\circ}\text{C}$  の時に単位時間当りに放射する電磁波のエネルギーのおおよそ何倍になるか。黒体を仮定せよ。
- (c) ポンプでタイヤに空気を入れる時の、タイヤに送り込まれる空気の温度変化を、熱力学第 1 法則に基づいて、定性的に説明せよ。

### 問題 3 : 選択問題・数学

2 行 2 列の行列  $A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

に関して、以下の問に答えよ。

問 1 行列  $A$  の固有値  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を求めよ。ただし、 $\lambda_1 < \lambda_2$  とする。

問 2 固有値  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  に属する固有ベクトル  $a_1$  と  $a_2$  を求めよ。

問 3  $D$  を対角行列 (対角成分以外がゼロの行列) とするとき、 $P^{-1}AP = D$  となるような行列  $P$  と  $D$  の組を一つ求めよ。

問 4 問 3 の  $P^{-1}AP = D$  から導かれる  $A = PDP^{-1}$  という関係を用いて、 $A^5$  を求めよ。

問 5 問 4 の場合と同じような方法を用いて、 $B^2 = A$  となるような行列  $B$  をすべて求めよ。

## 問題 4 : 選択問題・数学

偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

について、極座標  $(r, \theta)$  における境界条件

$$r = 1 \quad \text{で} \quad u = \sin 2\theta \quad (2)$$

を満たし、 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$  で有界な解を求める。ここで、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3)$$

である。以下の問に答えよ。

問 1 (3) 式で変数を変換すると、次式となることを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta$$

問 2  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$  と  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$  を求め、(3) 式により方程式 (1) が次式に変換されることを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

問 3  $u = R(r)\Theta(\theta)$  と変数分離すると、方程式 (4) は次の 2 式に分けられることを示せ。

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta = 0 \quad (6)$$

問 4 変換  $r = e^t$  を利用して、方程式 (5) を解け。問 5 方程式 (6) を解き、 $R$  が有界であることに注意して、境界条件 (2) を満たす解  $u$  を求めよ。問 6 問 5 で得られた解  $u$  を図示せよ。

## 問題 5 : 選択問題・物理学

図 1 のように、一様で太さが無視できる質量  $M$ 、長さ  $2a$  のはしごが、水平な床の上の点 1 から垂直な壁の上の点 2 に立て掛けてある。ここで床面とはしごの間の静止摩擦係数は  $\mu$  であり、壁面とはしごの間には摩擦が働かないものとする。また、はしごと床面のなす角度は  $\theta$  であり、このはしごが滑り出さない角度の最小値を  $\theta_0$  とする。点 1 における垂直抗力を  $N_1$ 、摩擦力を  $F_1$ 、点 2 における垂直抗力を  $N_2$  とする。このとき以下の問に答えよ。なお、重力加速度の大きさを  $g$  とする。

問 1 水平方向、垂直方向に対する力のつりあいの式を書き表せ。

問 2 点 1 のまわりの力のモーメントの式を書け。

問 3  $\theta_0$  を求めよ。

問 4 図 2 のように、はしごを角度  $\theta$  傾けた状態で、体重  $4M$  の人が点 1 から静かに登りはじめた。人がはしごを点 1 からの長さ  $x$  だけ登ったときの点 1 のまわりの力のモーメントの式を書け。

問 5 はしごの角度を  $\theta_0$  としたとき、はしごが滑り出さない範囲で人はどこまで登ることができるか？

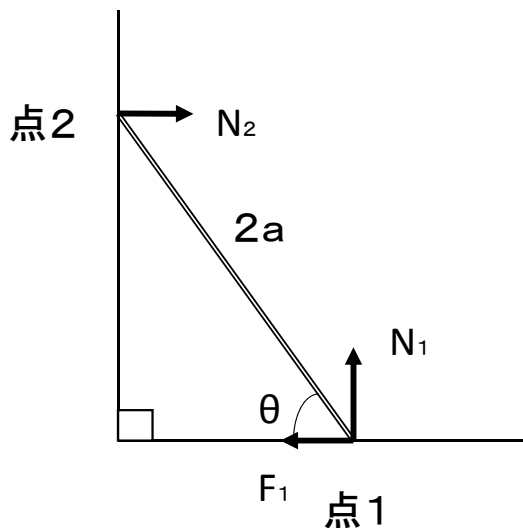


図 1

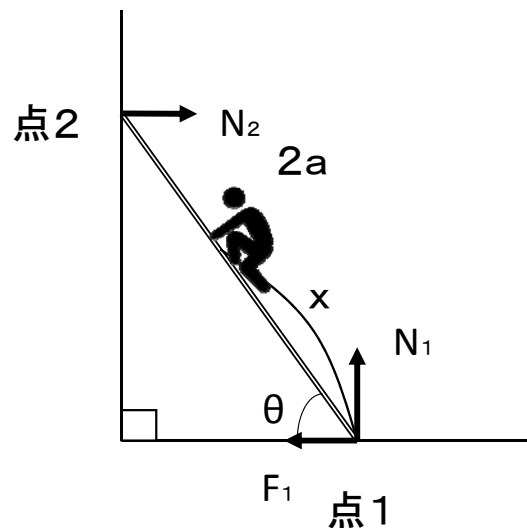


図 2

## 問題 6 : 選択問題・物理学

1 モルの理想気体からなる系で、状態 1 ( $p_1, V_1, T_1$ ) と状態 2 ( $p_2, V_2, T_2$ ) の間の移行に対して、図 1 に示す 2 通りの準静的過程を考える。ここで、状態 1 から 2 へ至る過程は断熱過程、状態 1 から A を経由して 2 に至る過程は等温過程と等積過程からなる。 $R$  を気体定数、 $C_v$  を定積モル比熱、 $C_p$  を定圧モル比熱とし、また  $\gamma = C_p/C_v$  とする。これらの準静的過程に関する以下の問に答えよ。

問 1 状態 A における圧力  $p_A$  を  $p_1, V_1, V_2$  を用いて書き表せ。

問 2 状態 1 から 2 までの内部エネルギーの変化はいくらか。

問 3 状態 2 における温度  $T_2$  を、 $T_1, V_1, V_2, \gamma$  を用いて書き表せ。

問 4 状態 1  $\rightarrow$  A および A  $\rightarrow$  2 において、外から加えられる仕事と熱はそれぞれいくらか。

問 5 状態 1  $\rightarrow$  A および A  $\rightarrow$  2 において、エントロピーの変化量はそれぞれいくらか。

問 6 状態 1  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  2  $\rightarrow$  1 というサイクルを行うとき、系の効率はいくらか。

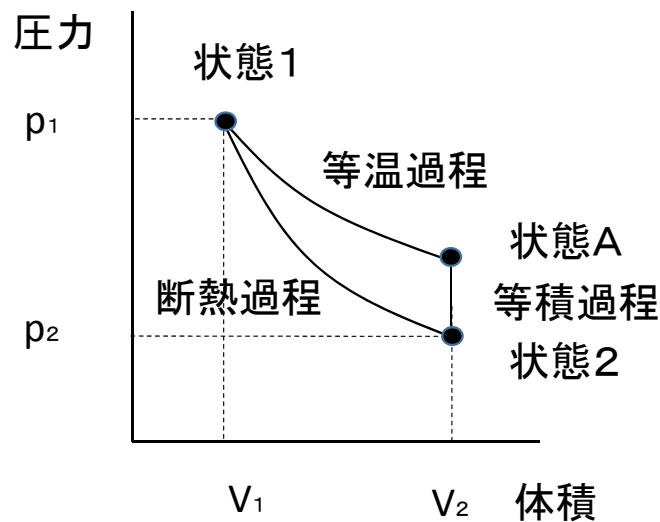


図 1



## 問題 7 : 選択問題・地球物理学

以下の問に答えよ。

問 1 図 1 は、ある日の地上天気図と同時刻の気象衛星による赤外画像である。図をもとに、以下の (a), (b), (c) に答えよ。

- (a) 季節はいつと考えられるか。その理由とともに答えよ。
- (b) 衛星画像において白色で表されているのはどのような領域か。大気放射学的観点と気象学的観点の双方から簡潔に説明せよ。
- (c) この日の北陸地方の天気について、分かりやすく解説せよ。

問 2 中緯度総観規模現象に伴う風の場合は、温度風の関係によって温度場と対応する。この対応について述べた以下の (a), (b), (c) に答えよ。

- (a) 地衡風は、水平方向の運動方程式において 2 つの力が釣り合った平衡状態の流れとして導かれる。この 2 つはどのような力か。また、地衡風はどんな性質を持つか、気圧分布と対応させて簡潔に説明せよ。
- (b) 圧力  $p_0$  と  $p_0 + \Delta p$  をもつ 2 つの等圧面の高度差を  $\Delta z$  とするとき、 $\Delta z$  が温度  $T$  によってどのように変化するかを考察する。静水圧平衡の式

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

と理想気体の状態方程式

$$p = \rho RT$$

とから密度  $\rho$  を消去した式をもとに、 $\Delta z$  と  $\Delta p$  との間に成り立つ式を導き、それに基づいて、2 つの等圧面の間隔  $\Delta z$  と温度  $T$  との関係を具体的に指摘せよ。ここで、 $g$  は重力加速度の大きさ、 $R$  は乾燥大気的气体定数である。

- (c) (b) で指摘した性質から、2 つの等圧面上における地衡風速について得られる知見は何か。解答用紙に 2 つの等圧面を図示し、具体的に説明せよ。

問 3 総観規模現象を記述する水平方向の運動方程式において、地衡風のつり合いを表す 2 つの項に次いで大きな項は、風速の時間変化を表す加速度項である。したがって、地衡風近似の精度を評価するためには、地衡風のつり合いを乱そうとする加速度項の大きさを評価すればよい。この評価に用いられる無次元量であるロスビー数の定義を述べ、その意味を簡潔に説明せよ。

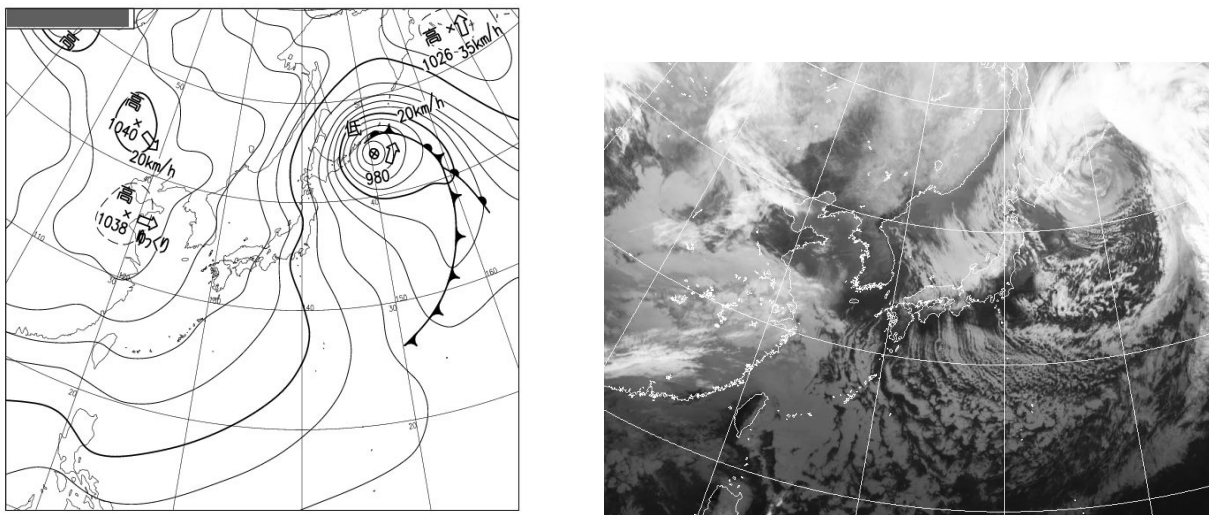


図 1: ある日の地上天気図 (左) と気象衛星画像 (右)。いずれも気象庁のホームページから入手したものを改変して使用。

## 問題 8 : 選択問題・地球物理学

海洋深層循環等に関する以下の問に答えよ。

問 1 現在の地球の海洋深層循環において、深層水の沈み込みは 2 つの海域で生じている。その 2 つの海域を挙げ、それぞれどのようにして重い水が生成されるかを簡潔に述べよ。

問 2 以下の文章中の [ A ] から [ I ] に当てはまる語句を書け (選択肢があるものはその中から最もよく当てはまるものを選べ)。

図 1 は子午面における深層循環の模式図である。模式図から示されるように、高緯度で重い水が沈み込み、それ以外の海域でゆっくりとした湧昇が生ずることで循環は閉じることになる。このような深層循環は密度差によって駆動され、海水の密度は、同じ圧力のもとでは水温と [ A ] で決まるので、[ B ] 循環という言い方もされる。なお、この循環における湧昇は、風と [ C ] による鉛直混合拡散に起因する。深層循環は、海洋の数 km の底層にまで及ぶ循環であり、[ D: 10-20, 100-200, 1000-2000, 10000-20000 ] 年程度の時間スケールを持つゆっくりとした循環である。このような循環を研究するには、[ E ] のような化学トレーサーを用いることが有効である。

一方、海洋の表層から 1000m 程度は、主に [ F ] によって水平方向の循環が駆動され、この循環による流れは深層循環による流れよりずっと速い。北半球を考えると、この循環により亜熱帯域では、[ G: 時計回り, 反時計回り ] の循環が形成され、その西岸には強い流れができ、北太平洋では [ H ]、北大西洋では [ I ]、がこれに相当する西岸境界流である。

問 3 図 2 は水平面における深層循環の模式図である。この図に示されるように、西岸境界近傍以外の内部領域では一様に極向きのゆっくりした流れとなる。これは渦位の保存によって説明される。渦位を、惑星渦度  $f$ , 相対渦度  $\zeta$ , 水柱の厚さ  $h$  を用いて示したうえで、内部領域で極向きの流れが生ずるメカニズムを渦位の保存から説明せよ。

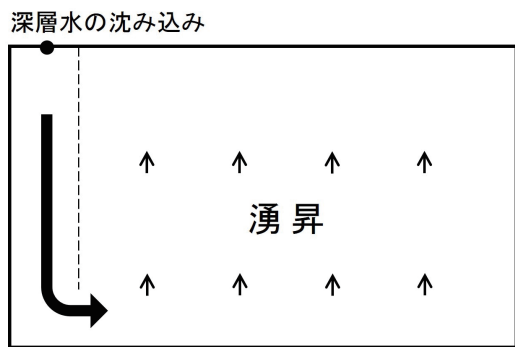


図 1: 子午面における深層循環の模式図

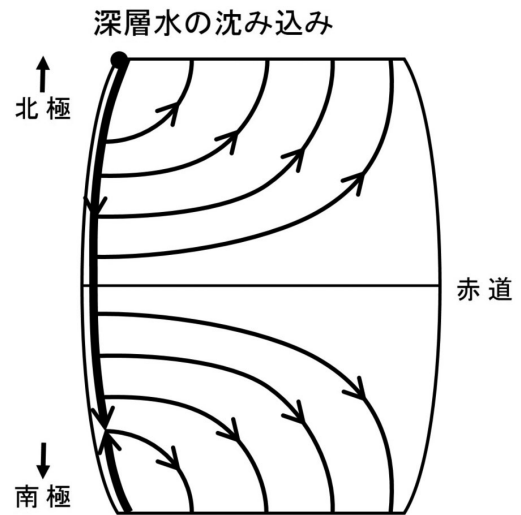


図 2: 水平面における深層循環の模式図

## 問題 9 : 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

- (1) 地球の表面温度を放射平衡により理解する上で、温室効果が重要な役割を果たす。温室効果をもたらす大気の性質について説明せよ。
- (2) 大気の静的安定度について分類し、それぞれの分類について、どのような鉛直運動が起きうるか、環境場の気温減率が変化しないと仮定して説明せよ。
- (3) 現代の天気予報は流体力学・熱力学等の物理法則に則って未来の大気状態をシミュレートする数値予報に基づいて実施される。この数値予報の精度には、原理的に越えることのできない限界が存在する。その限界について説明せよ。
- (4) 沿岸の海洋では岸に沿う方向に、赤道域の海洋では赤道に沿う方向に風が吹くと、湧昇もしくは沈降が生ずる。それらのメカニズムを述べよ。
- (5) 人工衛星マイクロ波放射計により得られる地球表面の物理量を 2 例あげて、それらが計測される原理とこのセンサーを用いることの利点を述べよ。
- (6) 海氷が生成され、それが輸送されて別の場所で融解すると、海洋に対して熱と塩・淡水が再配分される。このしくみを説明せよ。