北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 27 年度大学院修士課程入学試験問題

専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 27 年 2 月

専門・問題1

問 1 3次元の位置ベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = (x, y, z)$、その大きさを $r = |\mathbf{r}|$ とし、また3次元ベクトル $\mathbf{q}$ を $\mathbf{q} = (-y, x, 0)$ とするとき、以下のものを $\mathbf{r}$, r, $\mathbf{q}$ を用いて表せ。ただし、$r \neq 0$ とする。

(a) ∇r

(b) $\nabla \cdot \left(r \nabla \dfrac{1}{r} \right)$

(c) $\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{q})$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

問 3 2行2列の行列 A

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

に関して、以下の問に答えよ。

(a) 行列 A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(b) D を対角成分以外がゼロの行列とするとき、$S^{-1}AS = D$ となるような行列 S を求めよ。

(c) 曲線

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

を x–y 平面上に図示せよ。

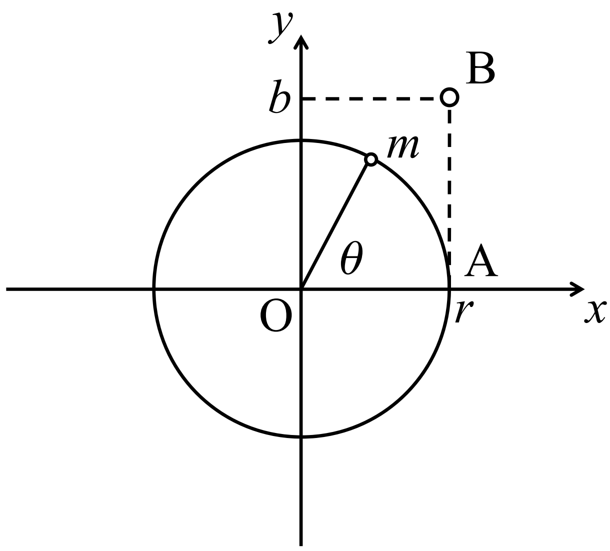
専門・問題2

問1 摩擦がない水平面上の点 O(0, 0) に一端を固定された長さ r の棒の先端に質量 m の小さいおもりをつけ、点 O の周りを回転させる。おもりの初期位置を点 A(r, 0)、棒が x 軸正方向となす角を θ とする。時刻 $t=0$ に静止していたおもりを $\dot{\theta}=at$ となるように加速し、何周かした後に棒からおもりを切り離して点 B(r, b) に固定されたガラス球に衝突させる。ただし、a, b は正の定数、$\dot{\theta}$ は θ の時間微分である。以下の問に答えよ。

(a) n 周目におもりが初期位置、点 A に戻ってくる時刻 t_n を求めよ。

(b) 点 B に固定したガラス球の中心にこのおもりを衝突させて、ある一定値 P より大きな力積を与えると、このガラス球は割れる。ガラス球を割るためには、何周目以降におもりを切り離せばよいか。

(c) 前問の衝突によりおもりが静止し、割れたガラス球が大きさの無視できる N 個の破片になって座標平面上を飛び散ったとする。i 番目の破片 $(i=1,2,\cdots,N)$ の質量を M_i、速度を (u_i, v_i) とするとき、これらが満たす条件式を 2 つ記せ。



問2 断熱容器の中に 0 °C の水と氷が、それぞれ 2 kg と 1 kg 入っている。氷を融かし 1 °C の水にするには、2 °C の水を何 kg 加えればよいか。ただし、水の比熱を 4×10^3 J kg^{-1} K^{-1}、氷の融解の潜熱を 3×10^5 J kg^{-1} とし、有効数字は 1 桁とする。また、容器内の空隙は無視し、水は一様な温度になるとする。

専門・問題 3

以下の問 1~3 に答えよ。

問 1 複素変数 $z = x + iy$ および $w = u + iv$ に対して、$w = \sin z$ なる変換を考える。

(a) z 平面上の y 軸に平行な直線 $x = a$ (a は実定数で、$-\pi/2 < a < \pi/2$) は、w 平面上ではどのような曲線に変換されるか。

(b) z 平面上の x 軸に平行な直線 $y = b$ (b は実定数で、$b > 0$) は、w 平面上ではどのような曲線に変換されるか。

(c) z 平面上の直線 $x = \pi/2$ および $x = -\pi/2$ は、w 平面上ではどのように変換されるか。

問 2 均一媒質中の熱伝導を表す微分方程式、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c\nabla^2 T \quad (T \text{ は温度、} c \text{ は熱伝導係数、} t \text{ は時間})$$

において、定常および 2 次元を仮定すると、

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

となる。

図 1 のように $x = -L$ および $x = L$ に無限に長い壁が存在し、それぞれ温度 T_1, T_2 に保たれているとき、壁の間の媒質の温度分布 $T(x, y)$ を求めよ。

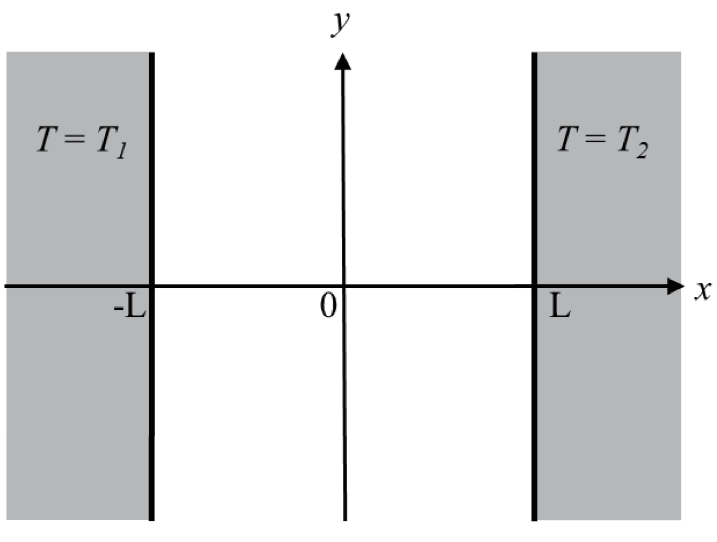


図 1:

問 3 図 2 のように x 軸上の $x < -1$ で $T = T_1$、$x > 1$ で $T = T_2$（$T_2 > T_1$）で、温度が一定に保たれているとき、$y > 0$ における温度分布 $T(x, y)$ を求めたい。問 1 の変換を利用して、この境界値問題を、問 2 の平行平板間の境界値問題に変換することを考える。z 平面上の調和関数は、問 1 の変換によって w 平面上の調和関数に変換される。このとき、$T = T_a$（$T_1 < T_a < T_2$)、の等温線を表す式を求めよ。

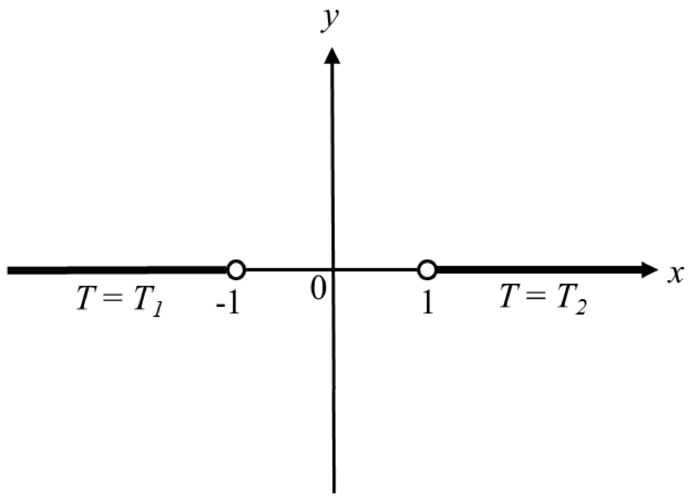


図 2:

専門・問題4

一様な厚さ H で断面積 S の氷が水に浮かび、浮力と重力が釣り合って静止している。氷と水の密度はそれぞれ ρ_i と ρ_w とし、重力加速度の大きさを g とする。また、氷の重心周りの運動、水の運動や抵抗・粘性、ならびに熱の出入り等は無視する。以下の問に答えよ。

問 1 氷に働く浮力の大きさ、および水面から上に出る部分の高さ h を求めよ。

問 2 氷が静止した位置から高さ z だけ鉛直に移動したときの、鉛直方向の運動方程式を書け。ただし、移動した距離は h より小さく、z は上向きを正とする。

静止した位置から高さ Δz $(< h)$ だけ氷を押し下げた後、氷を放すと氷は上下に振動した。

問 3 氷の振動の周期を求めよ。

問 4 氷の力学的エネルギーを考える。運動エネルギーおよび、位置エネルギーに対応するものを式で示し、それらの時間変化をグラフに描け。