北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 26 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 26 年 2 月

専門・問題 1

問 1 $\boldsymbol{r}$ を 3 次元の位置ベクトル、r を $\boldsymbol{r}$ の大きさ ($r = |\boldsymbol{r}|$)、$\boldsymbol{a}$ を任意の定ベクトル、n を自然数とするとき、以下のものを求めよ。

(a) ∇r

(b) $\nabla \times \boldsymbol{r}$

(c) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^n} \right)$

(d) $\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$

問 2 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について、

(a) 行列式の値を求めよ。

(b) 逆行列を求めよ。

問 3 複素関数 $z = x + iy$ および $w = u + iv$ に対して

$$w = \frac{1}{z}$$

なる変換を考える (ここで i は虚数単位である)。このとき、z 平面上の直線 $x = a$ (a は正の実定数) は、w 平面上ではどのように表されるか。図示せよ。

専門・問題 2

問 1 摩擦のない水平な板の上での 2 つのコインの衝突を考える。コイン 1 の質量を m_1、コイン 2 の質量を m_2 とする。コイン 1 を速さ v_0 で、静止しているコイン 2 にぶつけたところ、コイン 2 は、コイン 1 が衝突前に動いていたのと同じ方向へ、速さ v_2 で動いた。この方向に x 軸を取り、水平面内でそれと直交する方向に y 軸を取る。衝突後のコイン 1 の速度を $\boldsymbol{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ とする。ここで、v_{1x}, v_{1y} は $\boldsymbol{v}_1$ の x 成分と y 成分である。

(a) この場合、v_{1y} はゼロとなることを示せ。また、v_0, v_2, m_1, m_2 が既知であるとして、v_{1x} を求めよ。

(b) 衝突に際して、この 2 つのコインからなる系の力学的エネルギーが保存するとした場合 (完全弾性衝突の場合) の v_{1x} と v_2 を v_0, m_1, m_2 を用いて表せ。

(c) 衝突により力学的エネルギーが減少する場合 (完全弾性衝突ではない場合)、

(i) 2 つのコインからなる系の重心の速度、

(ii) $v_2 - v_{1x}$、

(iii) $v_{1x} = 0$ となるときの m_1 と m_2 の比 (m_1/m_2)、

それぞれは、力学的エネルギーが保存する場合と比べてどのようになるか (大きくなるか、小さくなるか、変わらないか)、論ぜよ。

問 2 両端に質量 m の小さなおもりをつけた質量の無視できる長さ $2l_0$ の棒を考える。重力や摩擦は働いていないとする。

(a) このおもりをつけた棒が重心のまわりに角速度 ω_0 で回転していた。おもりに働いている力を求めよ。(力はベクトルである)。

(b) 回転している途中で棒がゆっくりと伸び、棒の長さが 2 倍になった。角速度はいくらになったか。

(c) 棒の長さが 2 倍に伸びる前と後のおもりの運動エネルギーの差を求めよ。この変化を引き起した仕事はどのようなものか、論ぜよ。(一方のおもりについてのみ述べれば良い)。

専門・問題3

問1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

問2 $-1 < x < 1$ で定義された微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1}$$

について以下の問に答えよ。

(a) 式 (1) は x の一次関数を解にもつことを示せ。

(b) 式 (1) の左辺は

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\right]$$

の形で表せることを示し、x の関数 $p(x)$, $q(x)$ を求めよ。

(c) **(b)** で求めた $p(x)$, $q(x)$ について、微分方程式

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

の一般解を求めよ。

(d) 以上の結果を利用して式 (1) の一般解を求めよ。

専門・問題 4

海洋観測機器の 1 つに、体積を変えて浮力を調整することで海洋中を上下に移動しながら観測するブイがある。このブイの運動およびブイ内部の気体の熱力学について、理想的状況下で考えてみよう。ブイには図 1 のようなピストン・シリンダー装置が組み込まれ、ピストンを動かすことで全体の体積を変えられるとする。

問 1 初め、ブイの体積を V_0 に設定して海底からの高さ z_0 に投入したところ、ブイは静止したままであった。以下の問に答えよ。ただし、海水の密度 ρ は高さ z を用いて $\rho = \rho_0 - az$ (a は正の定数) と表されるとする。また、重力加速度の大きさは g で、海水の運動は無視する。

(a) このとき、ブイに働く浮力の大きさ $B(z_0)$ を求めよ。

(b) 釣り合いの条件からブイ全体の質量 M を求めよ。

問 2 シリンダー内には n mol の理想気体が密封されており、初め問 1 の状態で圧力 p_a、体積 v_a であった。ピストンは電力で駆動されるため、気体の圧力はシリンダー外部の圧力と無関係に決定されるが、気体の温度は海水温 T_0 に保たれる。いま、ピストンを動かし問 1 の状態からブイ全体の体積を V_1 まで増やした。ただし、その間の z の変化、およびピストンの質量は無視する。気体定数は R とし、高さ z_0 における海水圧は p_0 として、以下の問に答えよ。

(a) ピストンを動かした後の、気体の圧力を求めよ。

(b) 上の過程において気体がピストンにする仕事を求めよ。

(c) 上の過程において気体は熱を吸収するか放出するかを熱力学第一法則を用いて説明せよ。

(d) 上の過程においてピストンを動かすのに必要な仕事を求めよ。

問 3 問 1 の状態から問 2 のようにブイの体積を増した後のブイの運動を考える。ただし、仮想的にブイの回転・変形運動および海水の抵抗は無視出来る場合を考える。

(a) ブイの鉛直方向の運動方程式を書け。

(b) ブイはどのように運動するか。ブイの高さ z の時間変化を求め、簡潔に説明せよ。

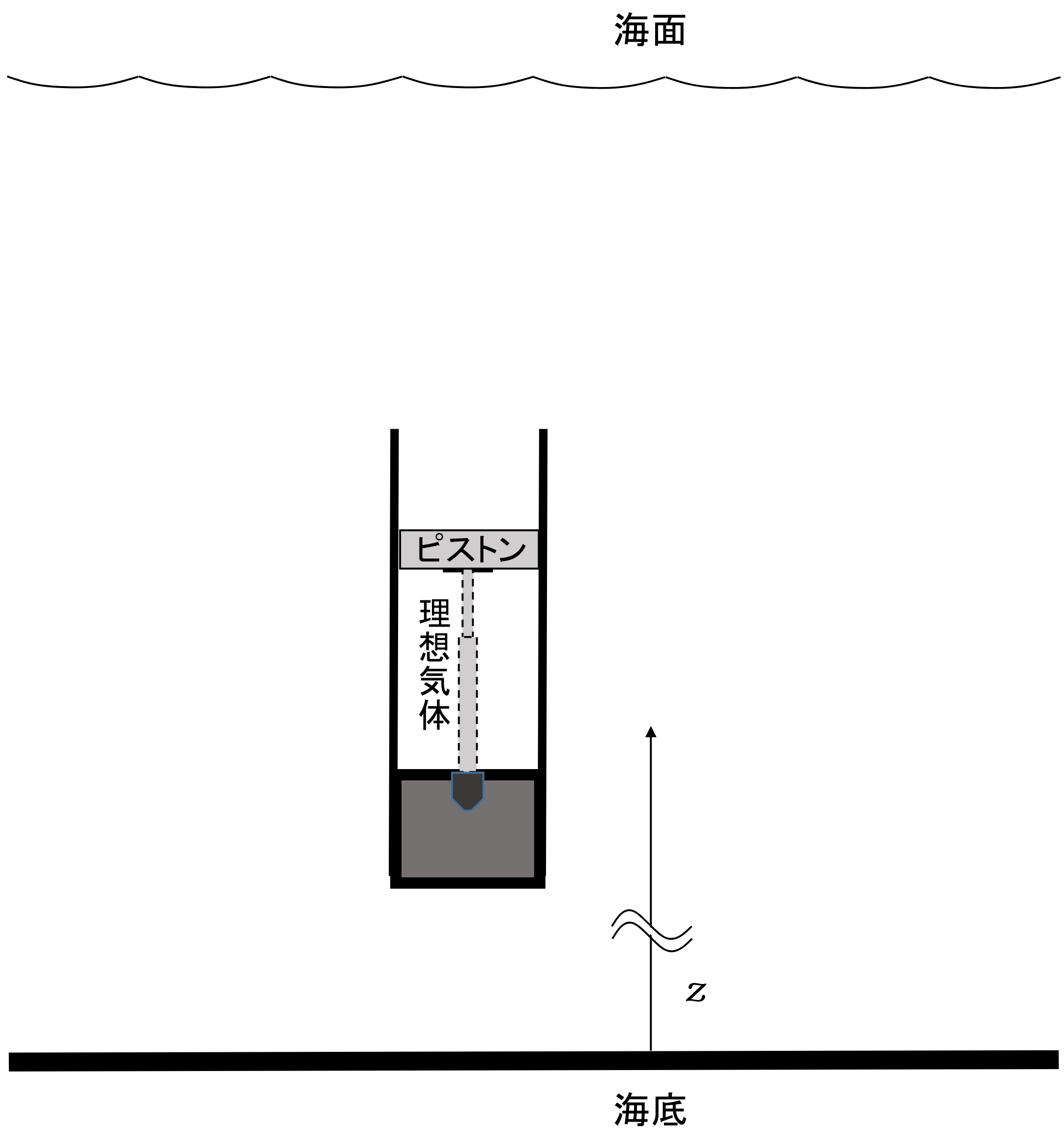

図 1: ピストン・シリンダー装置（ブイ）模式図