北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 25 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 25 年 2 月

専門・問題 1

問 1　以下の微分方程式に関する問に答えよ。

(a) 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = 2x - x^2$ を、$y = \dfrac{1}{x}$ とおいて、y に関する微分方程式を求めよ。

(b) 初期値問題 $\dfrac{dx}{dt} = 2x - x^2,\ \ x(0) = 1$ を解き、横軸を t、縦軸を x として、解を図示せよ。

問 2　$z^3 = -2 + 2i$ を満たす複素数は 3 つあるが、一つは実部も虚部も正である。この複素数 z を求めよ。ここで i は虚数単位である。

問 3　以下の行列に関する問に答えよ。

(a) 行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の 2 つの固有値の和は行列 A の対角要素の和に等しいことを証明せよ。ここで a, b, c は、実数である。

(b) 行列 $\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、$(\mathsf{AB})^{-1}$ を求めよ。

問 4　直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル $\boldsymbol{A} = (-y, x, 1)$ に関して以下を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

(b) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

(c) $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}\, ds$　ここで積分路 C は、$(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0)$ を直線で結ぶ一辺の長さ 2 の正方形の辺で、反時計回りに一周する。$\boldsymbol{t}$ は積分路方向の単位接線ベクトル。s は積分路にそった距離。

専門・問題2

以下の問に答えよ。

問1 質量 2kg の静止している物体に質量 1kg の物体を速さ 60m/s で衝突させた。衝突に際しては音も電磁波も出ず、衝突後は、２つの物体はくっついたまま同じ速度で移動した。２つの物体は同じ材質で出来ており、その比熱を 400J/(kg・K) とする。また、物体には床面との間の摩擦や空気抵抗は働かないとする。

(a) 衝突後の速さはいくらか。

(b) 衝突前後での物体の運動エネルギーはいくらか。

(c) 衝突前の物体の温度は共に 300K であった。衝突後の温度はいくらになったと考えられるか。

問2 自転車のタイヤがパンクして、中の空気が勢い良く噴き出している。噴き出してくる空気の温度はタイヤの中の空気の温度に比べて高いか、低いか、同じか。また、その理由を述べよ。

問3 腰の高さまで水を張ったプールの中に立ち、上から自分の足を見ると、プールの外で見る時よりも足が短く見える。その理由を述べよ。図を用いてもよい。

問4 幼い子が、ヘリウムガスが充填された空気より軽い風船を持って、電車に乗り込んだ。 電車が動き出し、加速しているときに風船を離したとする。風船は電車の中の人から見てどちらの方向に移動すると考えられるか。また、その理由を述べよ。なお、電車の窓はしまっており、風の影響などは考えないとする。

専門・問題3

方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

を、境界条件

$$f=0 \quad \text{at} \quad y=0 \tag{2}$$
$$f=0 \quad \text{at} \quad y=1 \tag{3}$$

のもとで解くことを考える。時間について周期解を考え、変数分離型の解が

$$f=g(x)h(y)e^{i\omega t} \tag{4}$$

の形に書けるとする。ここで ω は正の実定数とする。以下の問に答えよ。

問1 $e^{i\omega t}$ の実部をグラフに図示せよ。

問2 方程式 (1) は、定数 c を用いて、次の 2 式に分離できることを示せ。

$$\frac{d^2 g}{dx^2}+\omega^2 cg=0, \tag{5}$$
$$\frac{d^2 h}{dy^2}+(1-\omega^2)ch=0 \tag{6}$$

以下の問では、c が正の実数の場合を考える。

問3 方程式 (5) の一般解を求めよ。

問4 ω^2 の値で場合分けして方程式 (6) の一般解を求めよ。

問5 境界条件 (2) と (3) を満たす解 $h(y)$ を求め、そのときの c と ω の関係を書け。ただし、$h(y)$ は恒等的に 0 でないとする。

問6 問 5 の解を用いて、式 (4) の形をした恒等的に 0 でない方程式 (1) の解を求めよ。また $t=0$ のとき、その 1 例について f の実部の分布を $x-y$ 面上に図示せよ。

専門・問題 4

図のように、水平面上に x 軸、鉛直上方に y 軸をとるとき、平坦な面を挟む左右対称な斜面に沿って運動する質量 m、慣性モーメント I の密度一様な円柱（断面の半径 r）を考える。はじめ、円柱はその軸が x 軸、y 軸に垂直で、中心座標が（x_A, h_A）となる斜面上にあり静止している。その後、円柱は斜面上を運動し、さらに反対側の斜面上で円柱の中心座標が（x_B, h_B）となる点まで達する。円柱が静止状態から原点を通過するまで、円柱は斜面を滑らずに転がりながら運動するが、原点を通過したのち円柱に摩擦は働かないとする。重力加速度の大きさを g として、次の問に答えよ。

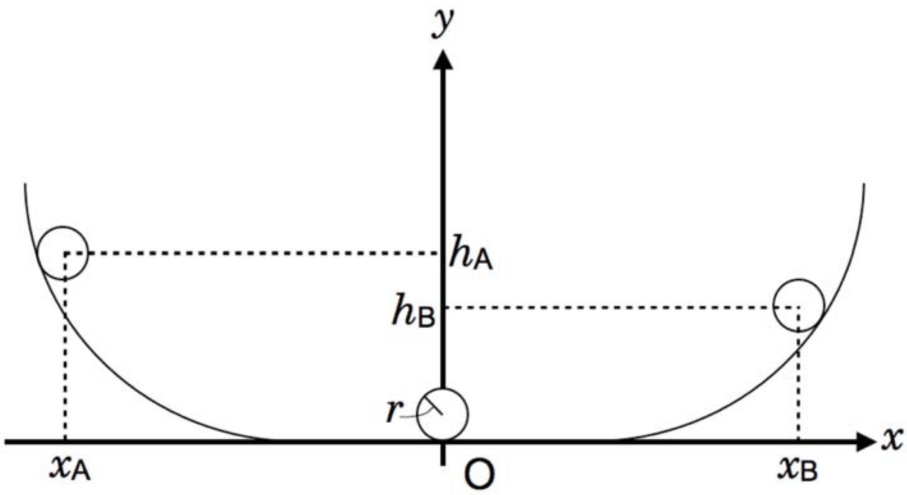

図 1:

問 1 円柱が原点を通過するときの円柱の中心の速さを v_0、円柱の回転角速度を ω_0 として、v_0 と ω_0 の関係を式で表せ。

問 2 v_0 と ω_0 の関係を、m, I, h_A, r を含む式で表せ。

問 3 v_0 と ω_0 をそれぞれ求めよ。

問 4 円柱の中心座標が（x_B, h_B）にあるとき、円柱のもつ力学的エネルギーを h_A と h_B を用いて表せ。

問 5 h_B を求めよ。

問 6 密度一様の円柱の替わりに、質量 m、外径 r の円筒（パイプのような形状）とした場合、h_B は大きくなるか、小さくなるか、同じか、その理由とともに答えよ。