北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成25年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3〜9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成24年8月

問題１：必答問題

問 1 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、任意の定ベクトルを $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ とするとき、以下のものを求めよ。

(a) $\nabla \cdot \{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{a}\}$

(b) $\nabla \{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})\}$

問 2 以下の初期値問題を解け。

(a) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = 1,\ x(0) = 0$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} = 2x,\ x(0) = 1,\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$

問 3 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

問 4 以下の式を満たす複素数 z を $x + iy$ の形で表せ。ただし、x、y は実数、i は虚数単位とする。

$$\log z = 2 + i\frac{\pi}{6}$$

問 5 以下の定積分 I_n を求めよ。ただし、n は正の整数とする。

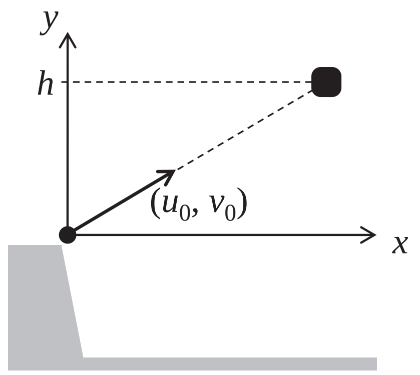
$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

問題 2： 必答問題

問 1 物体が静止状態から落下しはじめる。その初期位置に向けて、同時に小石を放つ。空気抵抗は無視できるとする。図のように小石の初期位置を原点にとり、x 方向 (水平)、y 方向 (鉛直) の初速度を各々 u_0, v_0 とする。重力加速度の大きさを g、初期時刻 $t = 0$ での両者の高度差を h として、以下の問に答えよ。

(a) $t \geq 0$ における小石の位置 (X, Y)、物体の位置の y 座標 η を表せ。

(b) 小石は物体に命中することを示せ。なお、地面との衝突は考えなくてよい。

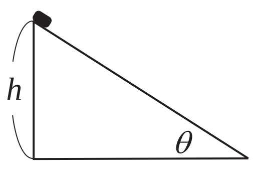


問 2 図のように傾き θ、高さ h の斜面を質量 m の物体が滑りおりる。初速を v_0、重力加速度の大きさを g、動摩擦係数を μ とする。以下の問に答えよ。

(a) 物体の速さが時刻とともに増す θ の条件を求めよ。

(b) 物体がおりきるまでに重力と摩擦力が物体になす仕事の和を求めよ。

(c) 物体がおりきった時点での物体の速さを求めよ。

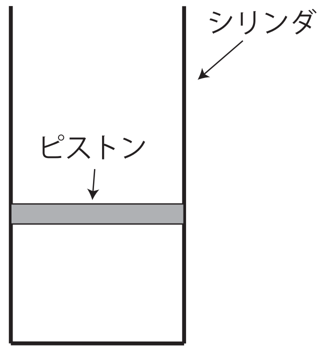


問 3 図のように、鉛直に立てられた摩擦のないピストン・シリンダ装置の中に、n モルの理想気体が入っている。ピストンの質量は M、断面積は S である。このとき、以下の問に答えよ。ここで、重力加速度の大きさを g、気体定数を R、大気圧を P_{atm} とする。また、装置と外界の間に気体の出入りがないものとする。

(a) はじめ、シリンダ内の気体の体積は V_0 であった。このときのシリンダ内の圧力、および気体の温度を求めよ。

(b) つぎに、気体に熱を加えると膨張し、はじめの体積の 2 倍になった。このとき、気体がピストンに対してなした仕事を求めよ。

(c) (b) の過程において、加えた熱の総量はいくらか。ただし、定積モル比熱は c_{v} である。



問題 3： 選択問題・数学

関数 $f(t)$ が $t \geq 0$ で定義され、複素数 s に対して

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

が存在するとき、$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい、$L\{f(t)\}$ で表すものとする。例えば、$L\{1\} = \dfrac{1}{s}$、$L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$ （ただし、$\mathrm{Re}(s) > 0$ ）である。以下の問に答えよ。

問 1 定数 a に対して、$L\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)$ が成り立つことを示せ。ただし、$\mathrm{Re}(s-a) > 0$ とする。

問 2 e^{at}、te^{at} および $t^2 e^{at}$ のラプラス変換を求めよ。

問 3 $f(t)$ の 1 階および 2 階微分を、それぞれ、$f'(t)$ および $f''(t)$ とする。$f(t)$ および $f'(t)$ が、$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ および $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f'(t) = 0$ を満たすとき、以下の式が成り立つことを示せ。ただし、$L\{f'(t)\}$ および $L\{f''(t)\}$ が存在するための条件はすべて満たされているものとする。

(a) $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

(b) $L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$

問 4 微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$$

の両辺をラプラス変換し、問 1〜3 の結果を用いることによって解け。ただし、初期条件は $x(0) = 0,\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$ とする。

問題 4： 選択問題・数学

2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ が以下の漸化式で与えられるとする。

$$\boldsymbol{x}_n = \mathsf{A}\ \boldsymbol{x}_{n-1}$$

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし、a、b は実数である。以下の問に答えよ。

問 1 $\boldsymbol{x}_n$ を初期値 $\boldsymbol{x}_0$ と A で表せ。

問 2 A の固有値を求め、それらと $\boldsymbol{x}_0$ を用いて $\boldsymbol{x}_n$ を表せ。

問 3 任意の $\boldsymbol{x}_0$ に対して、$n \to \infty$ で $\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$ に収束する a と b の条件を求め、a–b 平面上に図示せよ。

問 4 $\boldsymbol{x}_n$ が $n \to \infty$ で零ベクトル以外の一定のベクトルとなる a、b、$\boldsymbol{x}_0$ の条件を求めよ。（a、b の条件は場合分けをして考えていくことになる。それぞれの場合について、$\boldsymbol{x}_0$ の条件も考慮する必要があることに注意せよ。）

問題5： 選択問題・物理学

図1のように、半球の形状をした滑らかな容器の内壁に沿う質点の運動を考える。容器内壁の半径は l で、その中心軸が鉛直、容器の縁が水平となるように固定されている。このとき、以下の問に答えよ。ここで、質点の質量を m、重力加速度の大きさを g とする。また、容器の中心軸上において縁と同じ高さの点を、点Oとする。

問1 質点を図1の点Aから内壁に沿って水平に打ち出すと、質点は一定の高さを保ちながら円運動した。ここで点Aと点Oを結ぶ直線と中心軸とのなす角は θ_0 である。鉛直方向の力のつり合いを考慮することにより、内壁から質点へ働く垂直抗力の大きさを求め、m、g、θ_0 を用いて表せ。また、円運動における向心力の大きさを、m、g、θ_0 を用いて表せ。

問2 質点が問1のように水平を保ちながら円運動するとき、その速度の大きさ v_0 を、l、g、θ_0 を用いて表せ。また、円運動の中心に関する質点の角運動量を、m、l、g、θ_0 を用いて表せ。

問3 次に、質点を点Aに置いたのち、問2の v_0 よりも大きい初速度 v_1 で水平に打ち出した。すると、質点は上から見たとき図2のようにふくらみながら内壁に沿って上昇し、容器の縁を越えて飛び出した。この場合、初速度 v_1 は、$v_1 > v_c$ という条件を満たしている。ここで v_c は、質点の最高到達点が容器の縁の高さとなる場合の、点Aでの初速度である。この v_c を、l、g、θ_0 を用いて表せ。その際、エネルギー保存と角運動量保存を考慮せよ。

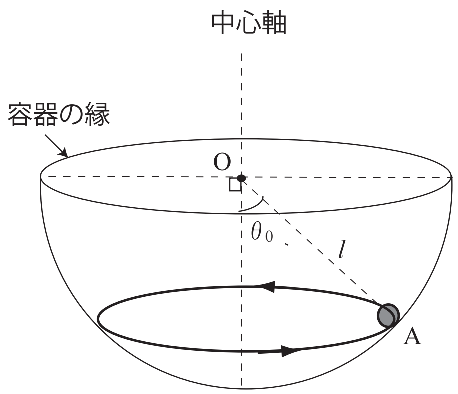


図1

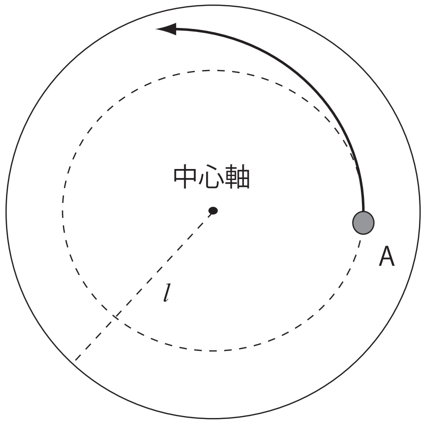


図2

問題６： 選択問題・物理学

図のように、ばねにつけたおもりを水平に設置したベルトコンベアに乗せて引く。ばねが伸び縮みしていないときの位置を 0 として水平に x 軸をとり、ベルトを一定の正の速度 V で動かす。おもりの質量を m、ばね定数を k、重力加速度の大きさを g、おもりとベルトの動摩擦係数を μ とする。時刻は t、おもりの速度は v で表す。以下の問に答えよ。

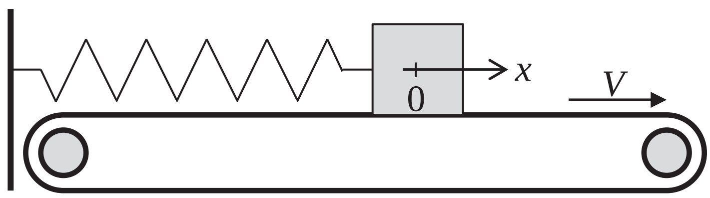
問 1 おもりに働く摩擦力が x の正方向をむく条件を、v、V を用いて表せ。

問 2 前問の条件が常に成り立つ場合について、おもりの運動方程式を表し、つり合いの位置を求めよ。

問 3 前問で求めた運動方程式の解を、$t = 0$ で $x = 0, v = 0$ の場合について求めよ。

問 4 前問で求めた解が実現するための V の条件を求めよ。

問 5 前問で求めた条件が成り立たない場合どのような運動になるか、2〜3 行で述べよ。



問題７： 選択問題・地球物理学

問 1 図 1 に示されるような総観規模およびそれより大きなスケールの現象においては、気圧 p、高度 z、密度 ρ の間に静水圧平衡 (静力学平衡) の式 $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ が非常によい近似で成り立つ。ここで、g は重力加速度の大きさである。気圧の高度分布はどのように決まるか。静水圧平衡の式に基づいて簡潔に説明せよ。

問 2 静水圧平衡の式は、気圧 p が高度 z の単調減少関数であることを示している。この性質を利用して、気象学ではしばしば高度方向の独立変数に気圧を用い、これを気圧座標系と呼ぶ。以下の (a) ～ (d) に答えよ。

(a) 気圧座標系では、高度に対応する従属変数として $\Phi = \int_0^z g\, dz$ で定義されるジオポテンシャルを用いる。$\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = g$ が成り立つことに注目し、状態方程式 $p = \rho RT$ と静水圧平衡の式を適用することにより、$\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}$ を p, T, R の式で表せ。ここで、R は乾燥大気の気体定数である。

(b) 摩擦力を無視するとき、局所直交座標系における南北方向の運動方程式は、気圧座標系を用いて次のように書かれる。

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{(ア)} = \underbrace{-\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{(イ)} \underbrace{-\frac{\partial \Phi}{\partial y}}_{(ウ)} \underbrace{-fu}_{(エ)}$$

ここで、$u,\ v,\ \omega$ は速度のそれぞれ x, y, p 成分、f はコリオリパラメータである。(ア) ～ (エ) の各項の物理的意味を簡潔に説明せよ。

(c) 中緯度総観規模現象において、上記の運動方程式は卓越する 2 項のつり合いにより近似できる。このつり合いの式と静水圧平衡の式とを組合せることにより、東西風に関する温度風の関係を導け。

(d) 高度座標系と比較したときの気圧座標系の長所を簡潔に述べよ。必要なら式を用いても良い。

問 3 図 1 は 850 hPa 面上のジオポテンシャルハイト Z (左) と温度 T (右) の分布である。ここで、Z は Φ を平均海面高度における重力加速度の大きさ g_s で割ったものである。この図に現れた現象を**問 2 (c)** の枠組みで記述するとき、以下の (a), (b) に答えよ。必要なら、$R = 300$ J K^{-1} kg^{-1}、$g_s = 10$ m s^{-2}、$f = 10^{-4}$ s^{-1}、子午線に沿った緯度 1° の長さを 100 km $(= 10^5$ m$)$、$\ln(800/850) = -0.06$ として計算せよ。

(a) 札幌上空 850 hPa 面上の風向と風速を求めよ。

(b) 札幌上空で 850 hPa から 800 hPa までの平均温度が、850 hPa 面の温度で代表されるとするとき、800 hPa 面における東西風速は 850 hPa 面と比較して速いか遅いか。その差 Δu を概算せよ。

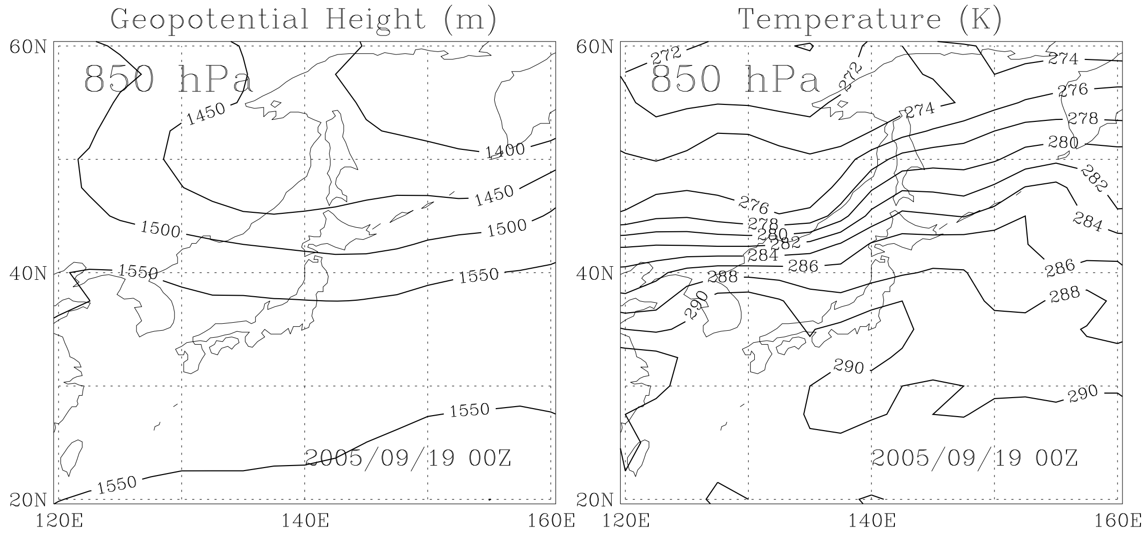


図 1: 2005 年 9 月 19 日世界時 0 時における 850 hPa 等圧面上の (左) ジオポテンシャルハイト (m) と (右) 温度 (K) の分布。等値線間隔はそれぞれ 50 m と 2 K。ECMWF 解析値を用いて作図。

問題8：選択問題・地球物理学

問1 北半球における海洋の運動について考える。外力や粘性を考慮しないときの東西方向の運動方程式は、以下のように書けるものとする。

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega v \sin\phi + 2w\cos\phi = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

ここで、u、v、w はそれぞれ東西、南北、鉛直方向の流速、Ω は地球の自転の角速度、ϕ は緯度、ρ_0 は密度、p は圧力を表すものとする。いま、代表的な水平スケール L が 100 km 程度、鉛直スケール H が 500 m 程度、水平流速のスケール U が 0.5 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ 程度の流れがあるとするとき、次の問に答えよ。なお、以下の問において、f はコリオリパラメータを表し、緯度は北緯 30 度としてよいものとする。

(a) 鉛直流速 w の代表的スケールが最大で $\dfrac{UH}{L}$ と書けるとすると、w は最大でどの程度の値になるか計算せよ。これを用いて、左辺第二項と第三項の相対的な大きさはどのようになるか、計算して比較せよ。

(b) 局所的な時間変化が無視できると仮定した場合、左辺第一項の代表的スケールはどのように書けるか、次の中から適切なものを選べ。
選択肢〔 $\dfrac{fUH}{L}$, $\dfrac{fUL}{H}$, $\dfrac{U^2}{L}$, $\dfrac{U^2}{H}$, fU 〕

(c) (b) で左辺第一項のスケールを第二項のスケールで割った比はどのように書けるか、U、L、H、f の中から適切なものを用いて表し、実際に計算せよ。またこの無次元数を何と呼ぶか答えよ。

(d) (a) から (c) のスケーリングに基づき、左辺の最も大きい項と右辺の項との釣り合いを示し、それを何と呼ぶか答えよ。

(e) (d) の釣り合いが成り立つとして、流れが南北方向のみにあるとき、静水圧平衡の関係を用いて海面の傾き θ (または $\tan\theta$) を f、g、v を用いて表せ。ここで g は重力加速度 ($9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$) である。また実際に海面での v が $0.49\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ であるとき、東西距離 100 km に対して、どちら向きにどの程度の海面高度の差ができるかを答えよ。

問 2 海洋の水温と塩分の特性を同じ図の中にプロットしたものを TS 図と呼ぶ。図 1 に示す A〜F 点のいずれかの地点において年平均した水温・塩分の鉛直的な分布を、図 2（1〜6）の TS 図に示した。どの TS 図がどの地点のものに対応するか、A〜F の地点それぞれに対応する TS 図の番号を、その根拠とともに示せ。

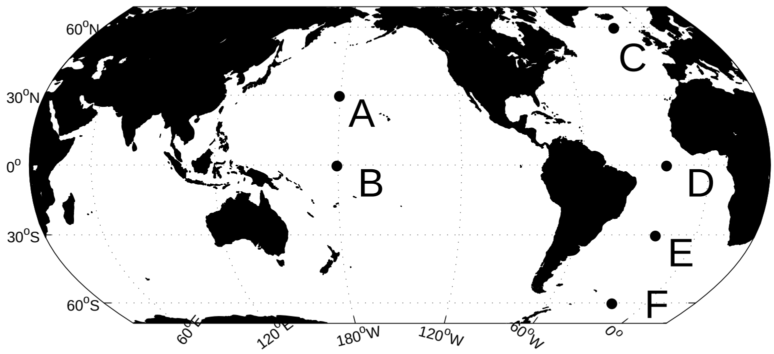


図 1: A〜F の各地点の地理的な分布。

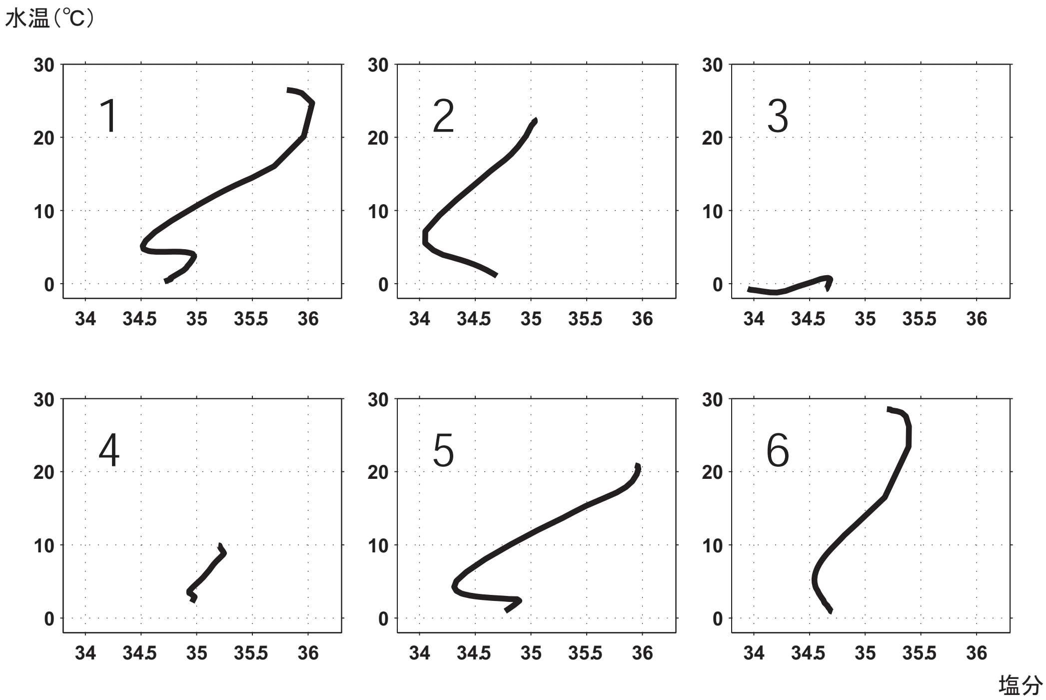


図 2: 各点における水温と塩分の特性分布。World Ocean Atlas 2009 に基づき作成。

問題 9： 選択問題・地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いても良い。

(1) 天気予報でしばしば「大気の状態が不安定である」という解説を耳にするが、これはどういうことを意味するか。気象学的に説明せよ。

(2) 大気の鉛直温度分布を議論する際に使われる放射対流平衡とはどのようなものか。放射平衡や乾燥断熱減率で決まる温度分布と比較しながら説明せよ。

(3) ヒートアイランド現象と地球温暖化とについて説明し、気候変化を議論する際に注意すべき点について述べよ。

(4) 東オーストラリア海流は南太平洋の中緯度西岸域を流れる黒潮のような海流である。この流れはどちら向きに流れているか。流れの向きとその成因について、風の分布およびコリオリパラメータの緯度変化と関連付けて説明せよ。

(5) 海洋に浮かべたブイが円運動をする様子がしばしば観測される。この運動はどのような現象と呼ばれているか。運動に関わる力を示し、どのような周期でどちら向きに回転するかについて述べよ。またこの回転周期や方向が緯度や北半球か南半球かによってどのように変わるか説明せよ。

(6) 海流の流速と流向の測り方について原理の異なる手法を 2 つ挙げ、それぞれの方法とその特長について述べよ。