北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 24 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 24 年 2 月

専門・問題 1

問 1 3 次元直交直線座標系 (x, y, z) を考える。ベクトル関数 $\mathbf{A} = (y + 2z, \sin(3x + 4y + 5z), \exp(6x + 7y))$ とスカラー関数 $\phi = \exp(8x + 9y + 10z)$ について、原点 $(0, 0, 0)$ において以下を求めよ。

(a) $\nabla\phi$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

(c) $\nabla \times \mathbf{A}$

(d) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A})$

(e) $\nabla \times (\nabla\phi)$

問 2 以下の行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求め、$\mathbf{S^{-1}AS} = \mathbf{D}$ となる行列 $\mathbf{S}$ を求めよ。ここで、$\mathbf{D}$ は対角成分以外がゼロの行列とする。

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 3 以下の初期値問題を解け。

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x + \sin 2t = 0, \qquad x(0) = 1, \quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$

専門・問題2

問1 図1のように、摩擦のない滑らかな水平面上に、長さ l、質量 M で厚さと幅が無視できる一様な板があり、その板の端に質量 m の人が立っている。人と板は初期には静止しているものとする。いま、板に平行に x 軸をとることとして、人が正の x 方向へ歩き出した。ここで、人は質点で近似できるものとする。また、人と板の重心の位置をそれぞれ x_m、x_s で表し、その初期位置を x_{m0}、x_{s0} とする。

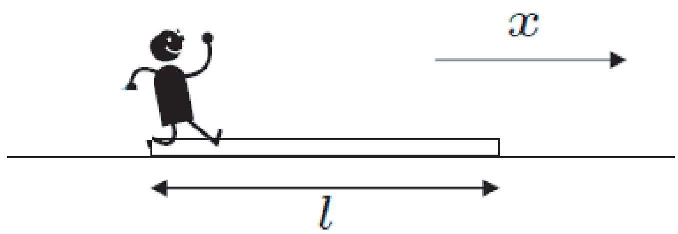

図1

(a) 初期における人と板の重心の間の水平距離 $x_{s0} - x_{m0}$ はいくらか。

(b) 人と板の運動量の和はどうなるか。

(c) 人が板のもう一方の端に着いたとき、板はどれだけ動いたか。 板の移動距離を求めよ。

問 2 図 2 のように水平面と角度 θ をなす滑らかな斜面に沿って、長さ l、質量 M で厚さと幅が無視できる一様な板を置き、その板の端に質量 m の人が立っている。人と板は初期には静止しているものとする。いま、板の置かれた向きに沿って下方に x 軸をとることとして、人が正の x 方向へ歩き出した。前問と同様にして、人と板の重心の位置をそれぞれ x_m、x_s で表し、その初期位置を x_{m0}、x_{s0} とする。また、鉛直方向の重力加速度は g とせよ。

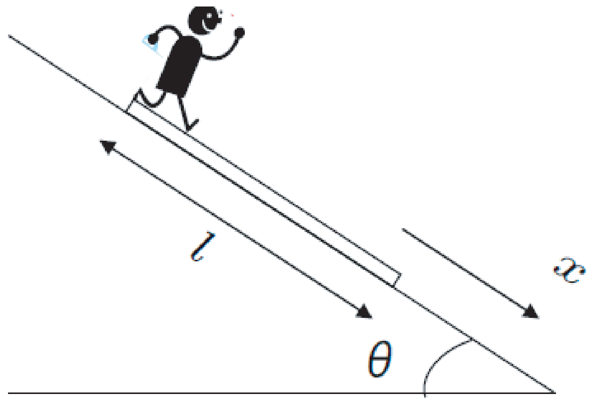

図 2

(a) 重力加速度の x 方向の成分はいくらか。

(b) 板が斜面を滑り落ちないように人が歩くとき、人はどのような加速度で歩けばよいか。その人の加速度を求めよ。

(c) (b) のように人が歩くとき、人が板のもう一方の端まで到達するのに要する時間を求めよ。

専門・問題 3

$-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数 $f(x)$、$g(x)$ について、$f(x)$ と $g(x)$ の複素共役 $g^*(x)$ の積の平均 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^*(x)dx$ を (f,g) と表すことにする。$f(x)$ は区分的に連続で、フーリエ級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ で表せるとする。ここで i は虚数単位、c_k は複素フーリエ係数である。以下の問に答えよ。ただし k、l、m は整数とする。

問 1 $g(x) = e^{ikx}$ とすると $g(-\pi) = g(\pi)$ であることを示せ。

問 2 $(e^{ilx}, e^{imx}) = \delta_{lm}$ であることを示せ。ここで $l \neq m$ のとき $\delta_{lm} = 0$、$l = m$ のとき $\delta_{lm} = 1$ である。

問 3 f の複素フーリエ係数について、$(f, e^{imx}) = c_m$ を示せ。

問 4 $f(x) = x$ の場合について、c_k を求めよ。

問 5 パーシバルの等式 $(f,f) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ を示せ。

問 6 パーシバルの等式を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ を求めよ。

専門・問題4

問1 x 軸に沿って運動する質量 m の質点を考える。この質点には保存力のみが働き、そのポテンシャルエネルギー $U(x)$ は下の図1のように与えられる。$U(x)$ は x_1、x_2、x_3 で極値を取り、$U(x_1) = U_1$、$U(x_2) = U_2$、$U(x_3) = U_3$ とする。

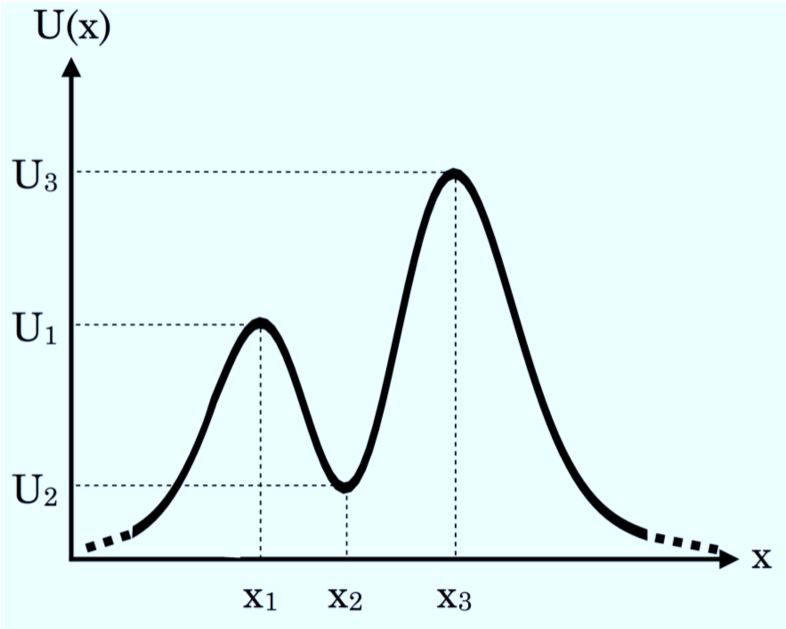

図1

(a) 質点が点 x_2 で速度 v をもつとき、質点が振動するための v の範囲を求めよ。

(b) $U(x)$ を $x = x_2$ の近傍で、テーラー級数の2次の項まで表せ。$x = x_2$ での $U(x)$ の1階微分を $U'(x_2)$、2階微分を $U''(x_2)$ と表すこととする。

(c) x_2 での質点の速度が十分小さいときの質点の運動方程式を示し、振動の周期を求めよ。

問 2 断熱容器を下の図 2 のように薄い板で仕切る。はじめは、仕切りの左側に理想気体 A を n_A モル、右側に種類の異なる理想気体 B を n_B モルそれぞれ入れる。2 つの理想気体の体積の比ははじめ $n_A : n_B$ であり、温度は同じとする。気体定数を R として、以下の問に答えよ。

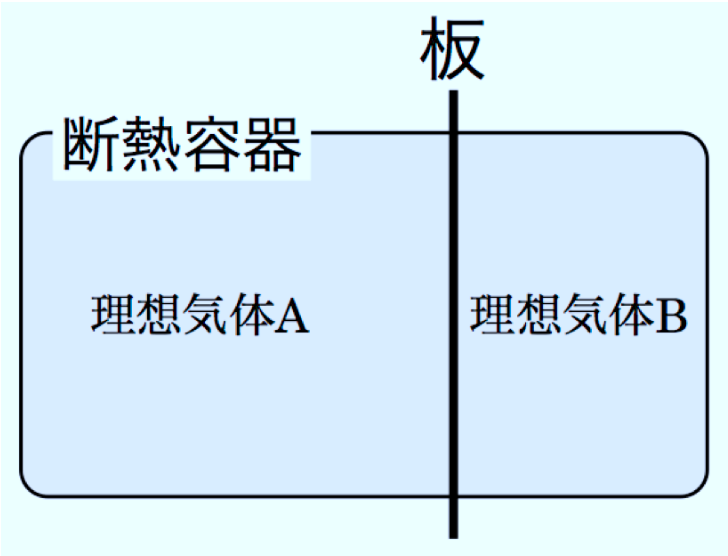

図 2

(a) 仕切りの左側と右側での気体の圧力比を求めよ。

(b) ここで仕切りを取り除くと、2 つの理想気体は混合する。この混合過程は、可逆過程か、不可逆過程か、答えよ。

(c) 理想気体 A と B からなる系のエントロピーは、仕切りを取り除く前と後でどのように変化するか求めよ。仕切りを取り除く前後で、温度は一定に保たれているとする。