北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成24年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3〜9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成23年8月

問題1：必答問題

問 1 以下の定積分 (a), (b) を求めよ。

(a) $$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}\,dx$$

(b) $$\int_0^\infty e^{-x}\ \cos x\ dx$$

問 2 以下の初期値問題 (a), (b) を解け。

(a) $$\frac{dx}{dt} + x = e^t, \qquad x(0) = 0$$

(b) $$\frac{dx}{dt} + \int_0^t x(\tau)d\tau = e^t, \qquad x(0) = 0$$

問 3 位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$、ある一定方向を向いた単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とする。$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{k}$で表されるベクトル $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$ を考える。以下の (a)∼(d) を、$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}$および数値で表せ。なお、直交直線座標系 (x, y, z) で計算する場合、何れかの座標軸を $\boldsymbol{k}$ と平行に取っても一般性は失われない。

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$

(b) $\nabla \times \boldsymbol{u}$

(c) $\nabla|\boldsymbol{u}|$

(d) $\nabla^2|\boldsymbol{u}|$

問 4 3 行 3 列の行列 A によるベクトルの変換、$\boldsymbol{y} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ を考える。以下の (a), (b) に答えよ。

(a) 任意のベクトル$\boldsymbol{x}$について、$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$が原点に対して対称となる A を記せ。

(b) 任意のベクトル$\boldsymbol{x}$について、$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$が直交するとき A の成分 a_{ij} $(i = 1, 2, 3\ ;\ j = 1, 2, 3)$ が満足しなければいけない条件を記せ。

問題2： 必答問題

問1 スカイダイバーとダウンヒルスキーヤーの終端速度（終速度とも呼ばれる）を比較する。スカイダイバーとダウンヒルスキーヤーの体重は同じで m、重力加速度を g とする。進行方向に対する断面積が A で、速度が v の物体が受ける空気抵抗は、定数 κ を用いて $-\kappa A v^2$ と近似出来るとする。以下の問に答えよ。

(a) 体の断面積が A_1 のスカイダイバーが落下する運動を考える。この場合の運動方程式を示し、終端速度を求めよ。図 1 はスカイダイバーが落下する時のシルエットで、図 1(左) は横から見たもの、図 1(右) は下から見たもの (この断面積が A_1) である。

図 1

(b) ダウンヒルスキーヤーが角度 θ の斜面を滑り降りる場合の斜面に沿う方向の運動方程式を示せ。また、終端速度を求めよ。ここで、斜面とスキーの摩擦係数を μ、ダウンヒルスキーヤーの体の断面積を A_2 とする。図 2 はダウンヒルスキーヤーが滑降する時のシルエットで、図 2(左) は斜面の横から見たもの、図 2(右) は斜面の下から見たもの (この断面積が A_2) である。

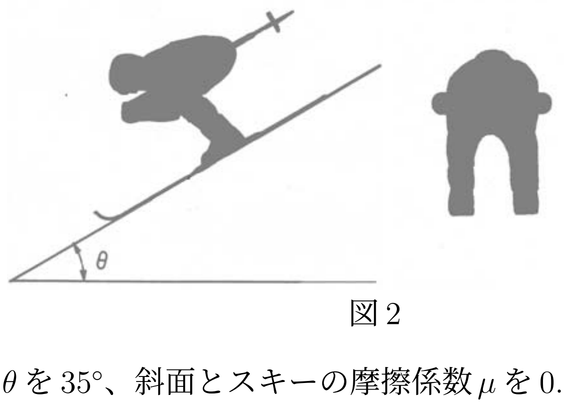


図 2

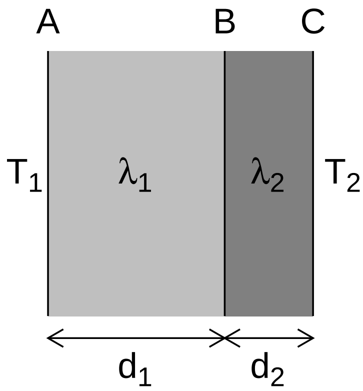
(c) 斜面の角度 θ を 35°、斜面とスキーの摩擦係数 μ を 0.09 とする時、ダウンヒルスキーヤーの終端速度が、スカイダイバーの終端速度よりも速くなるためには、腰をかがめることによって、体の断面積 A_2 をスカイダイバーの体の断面積 A_1 に較べてどれだけ小さくすれば良いか。ここで、$\sin 35^\circ = 0.57,\ \cos 35^\circ = 0.82$ とする。

問 2 揚水発電所では、電力需要の少ない時間帯の電力を利用して下池から上池にポンプで水を汲み上げておき、電力需要の多い時間帯に上池から下池に水を流すことで発電する。重力加速度を 10 m s^{-2} として、以下の問に答えよ。

(a) 上池と下池との標高差が 200 m である揚水発電所において、30 万 kW の電力供給を受けながら下池から上池にポンプで水を汲み上げる。ただし、このポンプの効率は 70%であるとする。深夜 0 時から午前 6 時までの間に汲み上げることの出来る水は何 kg か。

(b) (a) で汲み上げた水全てを、午前 10 時から午後 4 時までの間に一定量ずつ下池に流しながら発電する。この時の発電効率は 80%であるとする。この発電所の出力電力は何 kW になるか。

問 3 熱伝導率 $\lambda_1,\ \lambda_2$ (W m^{-1} K^{-1}) の物質からなる厚さ $d_1,\ d_2$ (m) の平板を下図のように重ね、面 A, C の温度をそれぞれ $T_1,\ T_2$ ($T_1 > T_2$) (K) に保つ。以下の問に答えよ。



(a) 熱は右向き、左向きのどちらの方向に流れるか。

(b) 定常状態においては、二つの平板内を流れる単位面積当たりの熱流 q (W m^{-2}) は一定になる。接触面 B での温度を T (K) とし、この状態を式で示せ。

(c) (b) で示した式から、T を求め、更に q を求めよ。

問題3： 数学

連立微分方程式

$\dfrac{dx}{dt}+x-y=0,\qquad \dfrac{dy}{dt}+ay+bx=0\qquad$ (ここで、a,b は実定数で、かつ、 $b\neq\dfrac{1}{4}(a-1)^2$)

を

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}+\mathsf{A}\boldsymbol{u}=0$$

の形にして解くことを考える。ここで、

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\b&a\end{pmatrix}$$

である。以下の問に答えよ。

問 1 A の固有値を求めよ。

問 2 行列 B を用いて A を対角化する:

$$\mathsf{D}=\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{B}$$

ここで、$\mathsf{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$。D の対角成分 λ_1,λ_2 が A の固有値であること, および、行列 B を構成する列ベクトルが A の固有ベクトルであることを示せ。

問 3 $\boldsymbol{u}=\mathsf{B}\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix}$ と置いたとき

$$\frac{d\phi_1}{dt}+\lambda_1\phi_1=0,\quad \frac{d\phi_2}{dt}+\lambda_2\phi_2=0$$

と書けることを示せ。

問 4 $x(0)=0,\ y(0)=1$ とする初期値問題を、以下の (1) と (2) の場合について解け。

(1) $a=2,\ b=0$

(2) $a=b=1$

問 5 **問 4** の (1) と (2)、それぞれについて、横軸を x、縦軸を y として解の軌跡の概略を図示せよ。

問題4：数学

問1 以下の問に答えよ。

(a) $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ を示せ。

(b) 1 の n 乗根を ω_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ と書く。この時、

$$\omega_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$$

と表せることを示せ。

(c)

$$1 + \cos \frac{2\pi \cdot 1}{n} + \cos \frac{2\pi \cdot 2}{n} + ... + \cos \frac{2\pi (n-1)}{n}$$

を求めよ。ただし、$n > 2$ とする。

問2 $z = x + iy$（x, y は実数) とする。以下の問に答えよ。

(a)

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

と表せることを示せ。ただし、$\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ である。

(b) α を任意の実数とする。いかなる α に対しても $|\sin \alpha z| \leq 1$ が成り立つには、z はどのような値をとるべきか。

(c) $w = \cos z + i \sin z$ によって領域 $\{0 < x \leq 2\pi,\ y \geq 0\}$ はどのような像に写像されるか。複素平面上に図示せよ。

(d) $w = \sin 2z$ によって領域 $\{0 \leq x \leq \pi/4,\ y \geq 0\}$ はどのような像に写像されるか。複素平面上に図示せよ。

問題5：物理

振り子を用いて重力加速度 g を実測することができる。ここでは、ケーターにより 19 世紀前半に発明され、以後 20 世紀半ば頃まで g の測定に利用された可逆振り子と呼ばれる器械について考察してみよう。

問1 準備として以下の問に答えよ。

(a) 重さが無視でき変形しない長さ l の棒の先に質量 m の質点をつけた理想的な振り子がある。この振り子を棒の端を支点として微小振幅で振らせた時の周期を、運動方程式をたてることにより求めよ。

(b) 全体の質量を M、重心まわりの慣性モーメントを I_G、支点と重心との距離を h とするような実体振り子がある。この振り子を微小振幅で振らせた時の周期を、運動方程式をたてることにより求めよ。なお、支点に関する慣性モーメントを I とすると、平行軸の定理 $I = I_G + Mh^2$ が成立することを利用せよ。

(c) (b) の実体振り子を用いて g を求める際の問題点は何か。ただし、振り子の周期の測定は 19 世紀にも十分な精度で実現可能であった。

問2 図 1 にケーターの可逆振り子の模式図を示す。この振り子は、図 2 のようにあらかじめ決められた点A、点 B のいずれかを支点として振らせることができる。おもり W_1 は固定されているが、おもり W_2 の位置は変更可能である。この振り子の全体の質量を M、重心まわりの慣性モーメントを I_G として、以下の問に答えよ。

(a) 図 2(左) のように、点 A を支点としてつるして微小振幅で振らせる場合の周期を求めよ。また、図 2(右) のように、点 B を支点とした場合の周期も求めよ。ただし、点 A を支点とした時の支点から振り子全体の重心 G までの距離を h_A、点 B を支点とした場合を h_B とする。

(b) おもり W_2 の位置を変えると、重心の位置 G や重心まわりの慣性モーメント I_G が変化する (ただし、$h_A + h_B = L_{AB}$ は一定である)。その結果、(a) で求めた周期も変わる。おもり W_2 をある適当な位置に設置した時、点 A、点 B を支点として振らせた周期が等しくなる。その時の I_G を求めた上で周期を求めよ。

(c) (b) の結果から、重力加速度の測定に際して、ケーターの可逆振り子の利点としてどのようなことが言えるか。

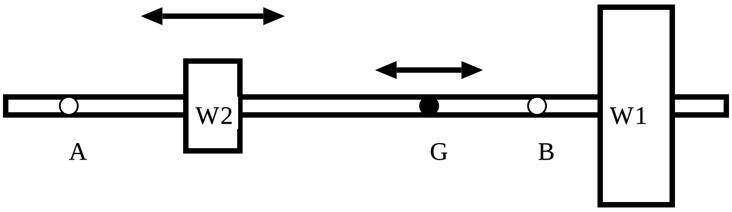


図 1

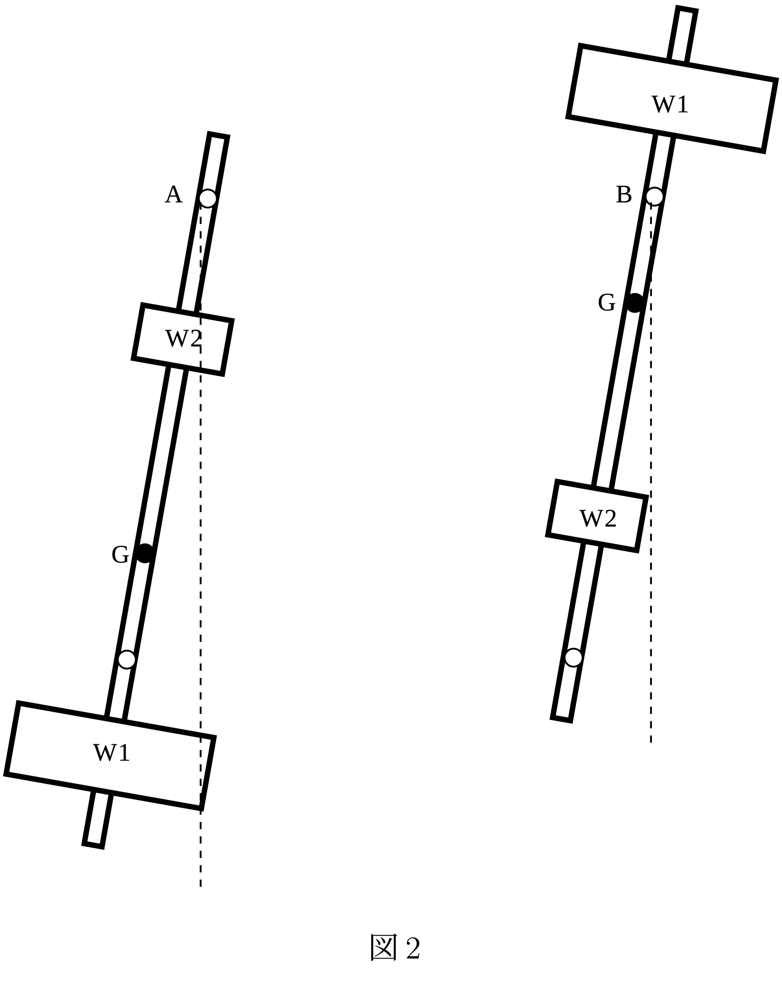
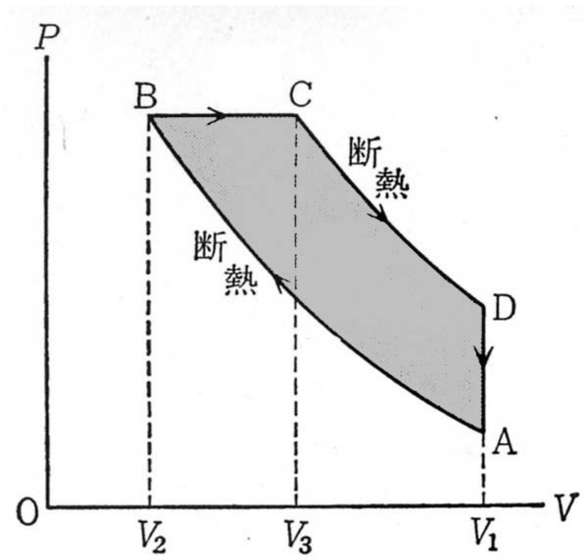


図 2

問題 6 ： 物理

問 1 理想気体が準静的に断熱変化をする時、圧力 P、体積 V、温度 T の間に、$TV^{(\gamma-1)} =$ 一定、$PV^{\gamma} =$ 一定 の関係があることを示せ。ここで、γ は比熱比で、定圧比熱 C_P と定積比熱 C_V を用いて $\gamma = C_P/C_V$ で与えられる。また、C_P と C_V は、温度によらず一定であるものとする。

問 2 理想気体が下図のような準静的過程でサイクル A → B → C → D → A を行う時、その熱効率を V_1, V_2, V_3 および γ で表せ。**問 1** にある P と V の関係を用いよ。熱効率は、高熱源からうけとる熱量に対する外部にする仕事の比で定義される。因みに、このサイクルをディーゼル・サイクルという。



問題 7： 地球物理学

北半球中緯度の非発散・順圧大気中の運動を考える。東西方向を x，南北方向を y とする局所 $x-y$ 座標系で考える。コリオリ因子は $f=f_0+\beta y$ と近似する。東西方向の風速を u，南北方向の風速を v，相対渦度を ζ とする。ここでは絶対渦度は保存する。すなわち，$\dfrac{d}{dt}(f+\zeta)=0$ が成り立つ。ここで $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}$ であり，$\zeta=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ である。
以下の問に答えよ。

問 1 地球の自転角速度を Ω とする。緯度 θ（ラジアン）における f を Ω と θ で表わせ。

問 2 初期に相対渦度がゼロの空気塊が北へ移動したとき，空気塊の相対渦度は正になるか，負になるか，ゼロのままか。理由とともに述べよ。

問 3 $\dfrac{d\zeta}{dt}+\beta v=0$ であることを示せ。

問 4 一様な西風 $\overline{u}$ の基本場上に重なった擾乱を考える。すなわち、$u=\overline{u}+u'$、$v=v'$、$\zeta=\zeta'$ で，$()'$ は擾乱成分を表わす。風は非発散なので，流線関数 ϕ' で以下のように表わされる。

$$u'=-\frac{\partial\phi'}{\partial y}\ ,\quad v'=\frac{\partial\phi'}{\partial x} \tag{1}$$

擾乱成分は小さく，擾乱の 1 次の項までとると以下のようになることを示せ。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\phi'+\beta\frac{\partial\phi'}{\partial x}=0 \tag{2}$$

問 5 微小擾乱を $\phi'=\mathrm{Re}\left(\Phi e^{i(kx-\omega t)}\right)$ と単色波で表わす。ここで，Re は実数部分を表わし，k は波数，ω は角振動数である。なお，ϕ' は南北方向に一様とする。**問 4** の (2) 式に代入し，この波の分散関係式は以下のようになることを示せ。

$$\omega=\overline{u}k-\frac{\beta}{k}$$

問 6 この波の位相は，基本場の西風に相対的に東へ伝播するか，西へ伝播するか。さらに，基本場に相対的な伝播速度の大きさの波長依存性について述べよ。

問 7 一様な西風 $\overline{u}$ 中の定常波について，その東西波長の $\overline{u}$ 依存性について述べよ。

問 8 **問 5** の分散関係式で表わされる波の群速度を求めよ。この波の群速度は基本場の西風に相対的に東向きか西向きか。さらに，群速度の x 成分の東西波長依存性について述べよ。

問 9 この波動擾乱は (　　　　　) 波という。括弧内を埋めよ。

問題８： 地球物理学

図 1 は、北半球のある大洋の中緯度西岸付近における、東西方向の水温の鉛直断面を示している。密度はほぼ水温で決まるとして、以下の問いに答えよ。

問 1　図 1 の F で示される、水温の鉛直勾配が大きな層を何と言うか。

問 2　今、水深 2000 m付近では流れはないとする。図 1 の水温分布から海面高度（海面のジオイドからのずれ）の東西分布はどのようになるか。分布の概略を A-E との位置関係がある程度わかるように図示せよ。

問 3　海表面での流速の南北方向成分の東西分布はどのようになるか。分布の概略を A-E との位置関係がある程度わかるように図示せよ。また、なぜそのような流速分布になるかを、**問 2** の海面高度分布との関係から説明せよ。

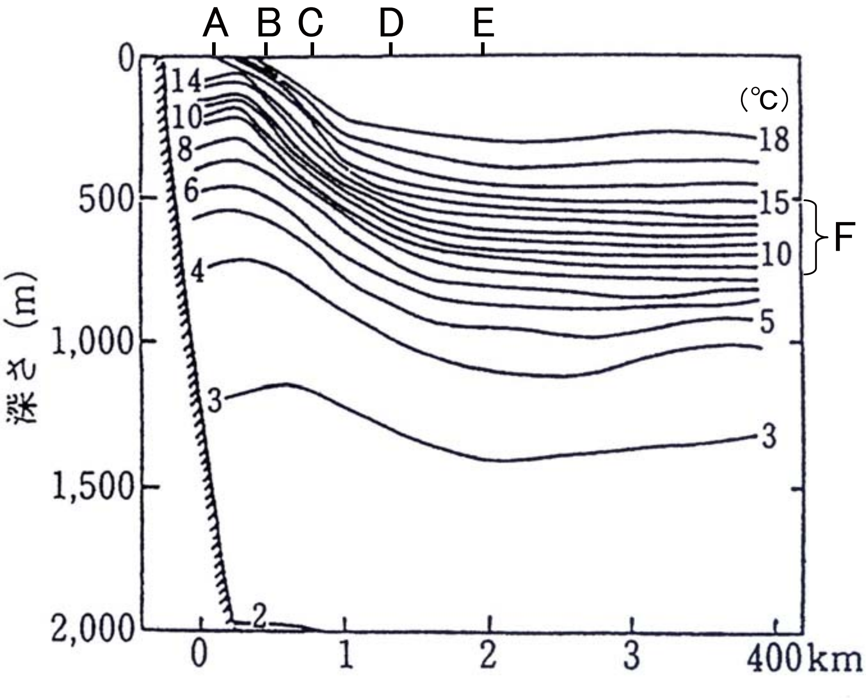


図 1

問 4 一般に、図 1 に示しているような大洋の西岸域では、西岸境界流なる強い流れが存在する。この流れを駆動しているのは風であり、風成循環として理解される。風成循環に関する以下の説明に対し、ア、イ、ウ、エ、オ、カ、キ、ク、ケ、コに当てはまる言葉を書け（選択肢があるものはその中から選べ)。

今、北太平洋の亜熱帯海域を考えると、北に偏西風（東向き)、南に貿易風（西向き）が卓越する。表層の水は、[ア] 輸送により、風が向かう方向に対して [イ] 方向に運ばれるため、内部領域（東岸、西岸以外の領域）では、表層の水は [ウ: 北上、南下、収束、発散] する。 そのため、表層下の水柱は [エ: 押し縮められる、引き伸ばされる]。 そうすると、{([オ]) ＋（相対渦度)} ／（水柱の厚さ）で表される渦位が保存されるためには、(相対渦度は大きく変化しないとすると)、[オ] が [カ: 小さく、大きく] なる必要がある。そのためには水柱は [キ: 東、西、南、北] へ移動しなければならない。このようにして内部領域で移動した水は、西岸において、まとまって元の方向へ戻され、強い流れができる。このようにして亜熱帯循環及び西岸境界流が形成され、北太平洋亜熱帯では、[ク: 時計周り、反時計周り] の循環ができ、その西岸境界流である [ケ] が形成される。北大西洋でも同様にして亜熱帯循環ができ、その西岸境界流である [コ] が形成される。

問題９： 地球物理学

以下の 6 問の中から 2 つを選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) 成層圏突然昇温とはどのような現象であるか説明せよ。また、その発生メカニズムについても説明せよ。

(2) 中谷宇吉郎の「雪は天からの手紙である」(原文は、“Snow crystals are the hieroglyphs sent from the sky” で、「雪結晶は空から送られた象形文字」）という言葉の気象学的な意味を説明せよ。

(3) 天気予報と地球温暖化予測は、どちらもコンピューターを用いて予測しているが、相違点もある。天気予報と温暖化予測の共通点と相違点を述べよ。

(4) 北大西洋では深層水が形成されるが、北太平洋では深層水は形成されない。その理由を地球上の水循環の視点を入れて説明せよ。

(5) 海洋の潮汐に見られる大潮・小潮とはどのような現象であるか説明せよ。 また、大潮・小潮が生じる理由を、地球と月と太陽の位置関係の模式図を用いて説明せよ。

(6) 次にあげる海洋の測定センサー・観測機器から 2 つを選び、測定対象と測定原理を説明せよ (各 150 字程度)。

衛星海面高度計、短波海洋レーダー、ADCP、プロファイリングフロート、
表層ドリフター、衛星マイクロ波散乱計、音響トモグラフィー