

北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成22年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。1問につき1枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成22年3月

専門・問題 1

問 1 位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$ とする。また、 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を定ベクトル、 C を定数とすると、次の各ベクトルの発散 (div) と回転 (rot) を、 \vec{r} , r , \vec{a} , \vec{b} , C を用いて答えよ。

- (a) $C \vec{r}$
- (b) $\frac{\vec{a}}{r}$
- (c) $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$

問 2 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

- (a) 固有値を求め、うち 1 つは重根となることを示せ。
- (b) 重根でない固有値に対する固有ベクトルを求めよ。
- (c) 重根の固有値に対する固有ベクトルはある平面上の任意のベクトルとなる。その平面の法線ベクトルを求めよ。

問 3 次の不定積分を求めよ。

- (a) $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1)$
- (b) $\int (2x + 4x^3) \tan^{-1} x dx$

専門・問題 2

問 1 温度 $T_1 (= -10^\circ\text{C})$ 、質量 $M_1 (= 10\text{g})$ の氷を、温度 $T_2 (= 30^\circ\text{C})$ 、質量 $M_2 (= 100\text{g})$ の水に入れた系を考える。氷がすべて融け、系全体が一様な温度 θ となったとする。他との熱のやり取りはないものとして、以下の問に答えよ。ただし、氷の比熱を $C_i (= 2\text{ J g}^{-1}\text{ K}^{-1})$ 、水の比熱を $C_w (= 4\text{ J g}^{-1}\text{ K}^{-1})$ 、氷の融解潜熱を $L (= 3 \times 10^2\text{ J g}^{-1})$ 、融点を $T_f (= 0^\circ\text{C})$ とする。

- (a) θ を計算して求めよ。
- (b) 系全体のエントロピーは増加するか、減少するか、変わらないか?
- (c) 系全体のエントロピーの変化を、 $T_1, T_2, T_f, \theta, M_1, M_2, C_i, C_w, L$ を用いて示せ。

問 2 密度 ρ の油滴 (球形を仮定) が密度 ρ_0 、粘性率 η の空气中を重力によって自由落下し、終端速度が v_1 となった。油滴の半径を a 、速度を v とすると、油滴が受ける抵抗力 F は $F = 6\pi\eta av$ (ストークスの法則) になるとする。また、重力加速度を g とする。以下の問に答えよ。

- (a) 油滴に働く浮力 G を求めよ。
- (b) 落下する油滴の運動方程式を示せ。
- (c) 油滴の終端速度 v_1 を求めよ。
- (d) 終端速度 v_1 に達した状態で、鉛直下向に電場 E をかけると、油滴の終端速度が v_2 に変わった。油滴は電荷 q を持っている。このとき油滴に働く力のつりあいの式を示せ。また、それをもとに v_2 を求めよ。

専門・問題 3

微分方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

を以下に従って解くことを考える。

問 1 $\phi(x, t) = X(x)T(t)$ と変数分離できるとすると、方程式 (1) は、

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{4}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (2)$$

となることを示せ。

問 2 (2) 式の両辺を定数 $-\lambda^2$ (λ は実数) として、 $X(x)$ と $T(t)$ の一般解をそれぞれ求めよ。

問 3 問 2 で得られた一般解について、次の条件 (3) を満たす λ を求め、 $\phi(x, t)$ を x と t を用いて表せ。

$$\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 \quad (3)$$

問 4 さらに、次の条件 (4) を満たす $\phi(x, t)$ を求めよ。

$$\phi(x, 0) = 2 \sin \pi x \quad (4)$$

専門・問題 4

下の図のように、長さ l 、質量 m の一様な細い棒の一端 A を固定し、点 A の周りを摩擦なしに回転できるようにする。重力加速度の大きさを g とするとき、次の問に答えよ。

- 問 1 点 A を通り棒に垂直な軸に関する棒の慣性モーメント I は、 $I = \frac{1}{3}ml^2$ と表される。これを実際の計算により示せ。
- 問 2 水平に保持されていた棒が重力場で回転運動を始め、図の破線で示されるように垂直になった。水平に保持されていたときと比べて減少した位置エネルギーを求めよ。
- 問 3 棒が鉛直になった瞬間における回転運動の角速度 ω を求めよ。
- 問 4 点 A の直下で A から距離 h の位置に杭を固定し、問 2 と同様に棒を運動させたところ、棒は杭と衝突して静止した。このとき、運動量変化と角運動量変化に注目することにより点 A に働く力積 T を計算し、 T が 0 となるような杭の位置を求めよ。

