北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成22年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

問題1と2は必答問題、問題3〜9は選択問題である。必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成21年8月

問題１：必答問題

問 1 自然対数の底 e と虚数単位 i を用いて $\sin x$ と $\cos x$ を表せ。また、その結果を用いて以下の恒等式が成立することを示せ。

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{1}$$

問 2 直交直線座標系 (x, y, z) における関数 $f = (ax^2 + by^2)e^{cz}$ およびベクトル $\boldsymbol{v} = (-\partial f/\partial y)\boldsymbol{i} + (\partial f/\partial x)\boldsymbol{j}$ を考える。ただし a, b, c は定数、$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである。以下のものを求めよ。

(a) $\nabla^2 f$

(b) $\boldsymbol{k} \times \nabla f$

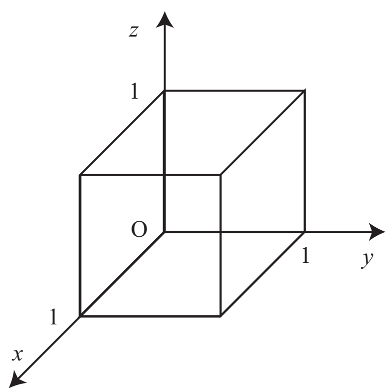
(c) $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$

(d) $\nabla \times \boldsymbol{v}$

問 3 直交直線座標系 (x, y, z) において、図に示す様な原点 O を頂点に持つ立方体 V、および立方体の表面 S を考える。ベクトル $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$ に対し次の面積分を求めよ。

$$I = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{2}$$

ただし、$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルとする。



問 4 以下の微分方程式の初期値問題を解き、解を図示せよ。ただし a は正または負の定数もしくは 0 である。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1 \tag{3}$$

問題２： 必答問題

問 1 摩擦のない平らな面上に置かれた質量 m_1 の物体 1 と、質量 m_2 の物体 2 を考える。$\boldsymbol{V}_0 = (u_0, 0)$ の速度を持つ物体 1 を静止状態にある物体 2 に衝突させたところ、衝突後の物体 1 の速度は $\boldsymbol{V}_1 = (u_1, v_1)$ であった。(なお、下の (b)、(c) での運動エネルギーはそれぞれの物体の並進運動に伴う運動エネルギーであり、物体は回転はしないものとする。)

(a) m_1, m_2, u_0, u_1, v_1 を既知として、衝突後の物体 2 の速度 $\boldsymbol{V}_2 = (u_2, v_2)$ を求めよ。

(b) $m_1 = m_2$ で、かつ、衝突に際して運動エネルギーが保存する場合、$v_1 = 0$ ならば u_1 はどうなるか。

(c) $m_1 = m_2$ で、かつ、衝突に際して運動エネルギーが保存する場合、$v_1 \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}_2$ のなす角は $\pi/2$ となる。このことを示せ。また、運動エネルギーが減少する場合、$\boldsymbol{V}_1$ と $\boldsymbol{V}_2$ のなす角はどうなるか、論ぜよ。

問 2 x 軸に沿って水平に運動することができる質量 m の質点を考える。この質点には保存力 $F(x)$ が働いており、この $F(x)$ による位置エネルギー (ポテンシャル) は $U(x) = k\sin^2 ax$ であった。ここで、a と k は正の定数である。

(a) $F(x)$ を求めよ。

(b) 横軸に x を取り、$U(x)$ を図示せよ。

(c) $x = 0$ を初期位置とする質点の運動の様子はその点での質点の速さ (初速) がある値 v_C より大きいか小さいかで大きく異なる。v_C を求めよ。さらに、初速が v_C よりも小さい場合の運動の仕方を述べよ。

問 3 以下の 1–5 の文章、それぞれについて、正しいか、間違っているか記せ。さらに、間違っているものに関しては、どこがどのように間違っているか述べよ。

1. 高温の物体ほど波長の長い電磁波を出す。

2. 1 モルの理想気体の占める体積は、温度と圧力と気体分子の分子量に依存する。

3. 断熱変化では、熱の出入りがないので、内部エネルギーは一定である。

4. ひとつの熱源から熱をとり、これを完全に仕事に変える以外に何の変化も伴わないようにすることは出来ない。

5. 摩擦や熱伝導を伴う現象は不可逆過程である。

問題3： 選択問題・数学

連立常微分方程式

$$f = \frac{d^2 g}{dt^2}, \tag{1}$$

$$g = -\frac{d^2 f}{dt^2}, \tag{2}$$

を考える。以下の問に答えよ。

問 1 g を消去し、f のみの方程式を導け。

問 2 問 1 で求めた方程式を解く準備として、$\lambda^2 = i$ の解が

$$\pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right), \tag{3}$$

となることを示し、$\lambda^4 = -1$ の解を求めよ。

問 3 問 1 で求めた方程式の一般解を求めよ。さらに、その解 f と (2) 式を用いて g を求めよ。

問 4 以下の境界条件を満たす f と g を求めよ。

$$f(0) = 1 \tag{4}$$

$$g(0) = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} f = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\infty} g = 0 \tag{7}$$

問 5 解曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ を考える。極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行い、r と θ を t の関数として求めよ。また、r を θ で表せ。

問 6 $x - y$ 面上における解曲線の概略を図示せよ。

問題 4：選択問題・数学

線形方程式、$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える。行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{G}$ のように、$\boldsymbol{A}$ の対角成分からなる行列 $\boldsymbol{D}$ とその他の成分からなる行列 $\boldsymbol{G}$ の和で表す。すなわち、

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする。そして、$k+1$ 番目のベクトル、$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$、が

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1} \left(-\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \right) \tag{3}$$

のように表されるベクトル列を作り、線形方程式 (1) を反復法で解くことを考える。以下の問に答えよ。

問 1 (3) 式で表されるベクトル列がベクトル $\boldsymbol{x}_f$ に収束するとき、$\boldsymbol{x}_f$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることを示せ。

問 2 具体例として、次のような n=2 の場合の線形方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{4}$$

- **(a)** 方程式 (4) を反復法を用いずに解け。
- **(b)** (4) 式に反復法を適用する。$\boldsymbol{D}^{-1}$ を求めよ。
- **(c)** 1 番目のベクトルを $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ として $\boldsymbol{x}^{(3)}$ を求め、問 2(a) の解に近づくことを確認せよ。

問 3 一般的な線形方程式 (1) に戻る。

- **(a)** (3) 式において、$\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ の i 成分、$x_i^{(k+1)}$、を $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^{(k)}$ の成分を用いて表せ。

(b)

$$\max_{1\le i\le n} \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < 1 \tag{5}$$

ならば、(3) 式で表されるベクトル列が収束することを示せ。ただし、任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とその写像 f に対し

$$||f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})||_\infty \le \rho||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_\infty, \quad 0 \le \rho < 1 \tag{6}$$

ならば、$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = f(\boldsymbol{x}^{(k)})$ で表されるベクトル列はただ一つのベクトル $\boldsymbol{x}_f$ に収束するとしてよい。ここで、

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \tag{7}$$

である。

問題5：選択問題・物理

水平で直線的に伸びる舗装道路を走る自動車の運動を考える。その運動方程式は、速度 v が正の場合、次のように表わされるとする。

$$ma = f - \kappa v^2 - \mu N \tag{1}$$

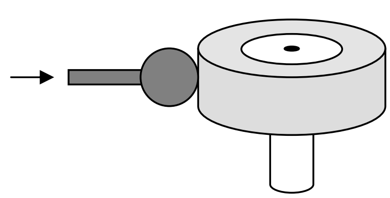
ここで、m は自動車の質量、a は加速度、f は推進力、N は垂直抗力で、$N = mg$、g は重力加速度である。式 (1) の右辺の第2、第3項はそれぞれ、空気抵抗、転がり抵抗（タイヤの転がりに伴って発生する抵抗）を表わし、κ, μ は正の定数である。以下の問に答えよ。

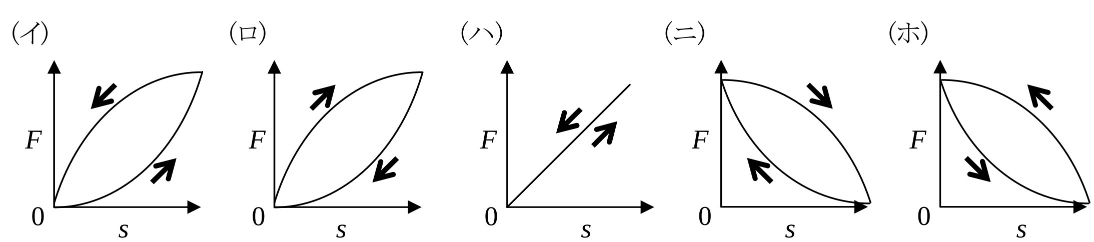
問1 推進力 f が正で一定な場合を考える。初期に静止していた自動車が正の速度をもって動きだした。そのとき f がみたす条件を求めよ。動き出した車は、やがて一定の速度に漸近する。その速度を求めよ。

問2 この車が一定の速度 v_0 (> 0) で、距離 L だけ走る場合に、推進力 f がなす仕事 W を求めよ (f を用いないで表わせ)。

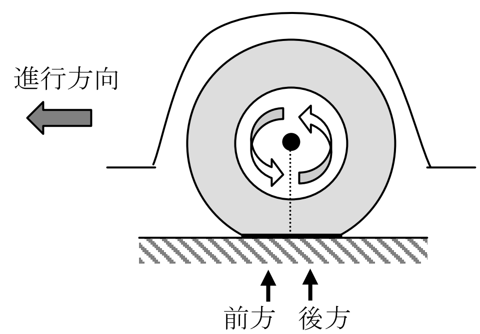
問3 この車が速度 v_0 で走る際の燃費、すなわちガソリン 1 l を燃焼させる間に進む距離を、有効数字2桁で求めよ。ここで、$v_0 = 20$ m s^{-1} (72 km h^{-1}), $\mu = 0.01$, $\kappa = 0.4$ kg m^{-1}, $m = 1000$ kg , $g = 10$ m s^{-2}, この車がガソリンの燃焼エネルギーを推進力の仕事に変える効率 η は 0.2, ガソリンの燃焼エネルギーは $\epsilon = 4 \times 10^7$ J l^{-1} とする。

問4 下図のようにこの車のタイヤを固定して特性を調べた。鉄球を押し当ててへこませ、それを引いて変形をもとに戻すと、タイヤのゴム中で熱が発生し、温度が上がった。鉄球がタイヤより受けた力の大きさ F を連続的に測定した結果を表わす図としてふさわしいものは、下の (イ)〜(ホ) のどれであるか。また、鉄球がタイヤを押す力がした仕事は正、負、ゼロのいずれであるか。ここで、横軸は、鉄球がタイヤを押し込んだ深さ s であり、図の太い矢印にそって時間が進んだものとする。





問 5 転がり抵抗は、問 4 の実験結果のように、タイヤが接地面で変形する際に発熱することに主に起因する。接地面では、タイヤは下の図のように変形する。タイヤが回転すると、車軸直下より進行方向前方ではタイヤは車軸方向に縮みつつあり、後方では伸びつつあることになる。問 4 を踏まえて、地面からタイヤがうける力の合力の水平成分を考え、転がり抵抗が生じる理由を定性的に述べよ。必要に応じて図解せよ。



問題6：選択問題・物理

エントロピーに関する以下の問に答えよ。

問 1 温度 T_H の高温熱源から温度 T_L の低温熱源に熱量 Q を移した場合の系全体のエントロピー変化を求めよ。また、このエントロピー変化は正、負、ゼロのいずれであるかを示せ。熱源は十分大きく、それぞれの熱源の温度は熱の移動中に変化しないとする。

問 2 温度 T_1、質量 m の水と温度 T_2、質量 m の水を混ぜると、温度 $(T_1+T_2)/2$ で質量 $2m$ となった。水の比熱を c とする。系全体のエントロピーの変化を求めよ。また、このエントロピー変化は正、負、ゼロのいずれであるかを示せ。

問 3 図 1 のようなカルノーサイクルを考える。$A \to B$ と $C \to D$ は等温過程で $A \to B$ では温度 T_2 の高温熱源から熱量 Q_2 をもらい、$C \to D$ では温度 T_1 の低温熱源へ熱量 Q_1 を放出する。$B \to C$ と $D \to A$ は断熱過程である。$A \to B \to C \to D \to A$ と一回りするときの各過程における、作業物質のエントロピーの変化を求めよ。また、横軸をエントロピー S、縦軸を温度 T としたとき、一回りするときの $S-T$ 面での作業物質の状態変化を図示せよ。

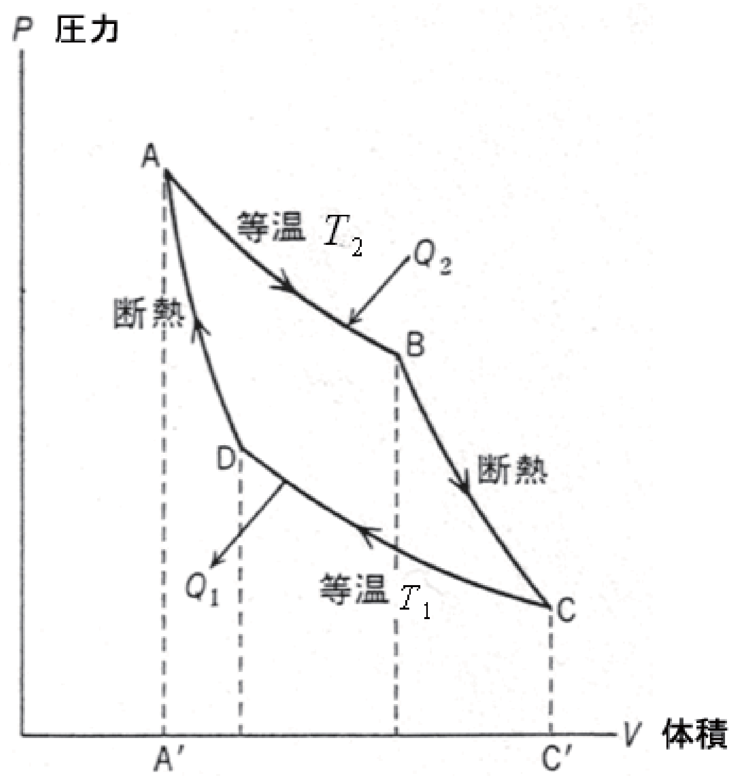


図 1:

問 4 図 2 のように体積 V_1、温度 T の断熱容器中の 1 モルの理想気体が真空中へ自由膨張し、体積が V_2 となった場合 $(V_2 > V_1)$ の気体のエントロピーの変化を求めよ。ただし、温度は変わらない。気体定数は R とする。

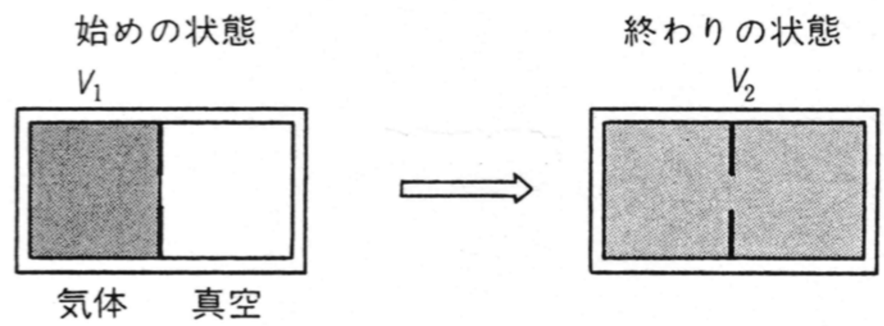


図 2:

問題７： 選択問題・地球物理学

図 1 は、2003 年のある月の北半球の帯状（東西）平均した気温、東西風、温位の緯度気圧（高度）分布図である。各パネルの縦軸は、左が気圧軸、右が高度軸となっている。以下の問に答えよ。

問 1 この図の季節は北半球の夏と冬のいずれか、根拠をあげて答えよ。

問 2 対流圏界面の定義として最も頻繁に用いられるものは、「少なくとも 2 km の高度範囲にわたって気温減率が 2 K km^{-1} かそれ以下の値を持つ層の下端」である。図から対流圏界面高度の緯度分布の概略を読み取り、解答用紙に横軸緯度、縦軸気圧（または高度）のグラフを描いて示せ。

問 3 東西風には北緯 30 度、気圧 200 hPa 付近に西風 (東向きの風) の極大が見られる。これを何と呼ぶか。また、この平均風と温帯高低気圧活動との関係について 30 字程度で述べよ。

問 4 図の右のパネルは温位 θ、

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p} \tag{1}$$

の分布を示している。ここで、T は気温 [K]、p は気圧 [hPa]、$p_0 = 1000$ hPa、R は乾燥空気の気体定数、c_p は乾燥空気の定圧比熱である。

(a) 温位が保存するのはどのような場合か。また、気圧 p_1、気温 T_1 の空気塊を、温位が保存するようにして気圧 1000 hPa まで移動させた時、この空気塊の気温はいくらになるか。

(b) 図の温位分布と、問 2 で示した対流圏界面高度の分布から、成層圏と対流圏の間の空気の輸送について何が言えるか。

問 5 中高緯度における水平風と気温の大規模な分布は温度風の関係で結び付いている。

(a) 静力学平衡の式、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2}$$

と地衡風の式、

$$-fu = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

および理想気体の状態方程式

$$p = \rho R T \tag{4}$$

を用いて、温度風の式、

$$f\frac{\partial u}{\partial z} \simeq -\frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{5}$$

を示せ。ここで、ρ は密度、f はコリオリパラメータ、u は東西風、z と y はそれぞれ鉛直方向と南北方向の距離である。例えば、$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\ln p)$ を計算してみよ。なお、$\frac{\partial T}{\partial z}$ の項が出て来るが、これはスケールアナリシスによると他の項に比べて十分に小さいので、無視してよい。

(b) 北緯 30 度の 500 hPa（約 5 km）付近および 100 hPa（約 16 km）付近において、それぞれ温度風の式の両辺を図から有効数字 1 桁程度で見積もり、この関係が確かに成り立っていることを示せ。なお、北緯 30 度におけるコリオリパラメータ f は $7.3\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$、地球の平均半径は 6370 km、重力加速度 g は $9.8\ \mathrm{m\ s}^{-2}$ である。温度風の式における気温の単位は Kelvin であることに注意せよ。

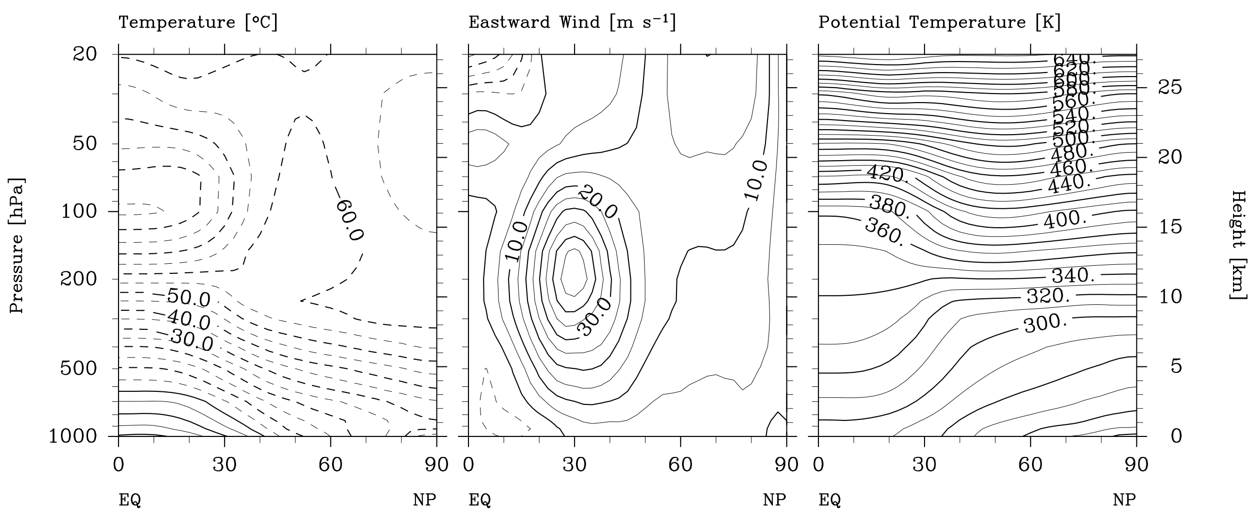


図 1: 2003 年のある月の北半球の気温、東西風、温位の帯状（東西）平均図。等値線の間隔は、気温が 5°C、東西風が $5\ \mathrm{m\ s}^{-1}$、温位が 10 K である。また、気温と東西風の点線は、それぞれ零下の値、東風 (西向きの風) を示す。ヨーロッパ中長期予報センター（ECMWF）による全球客観解析データを用いた。

問題８：選択問題・地球物理学

黒潮のような北半球の大規模な海流について、以下の問に答えよ。ただし、以下において、x は東西方向、y は南北方向の位置座標であり、東向き、北向きをそれぞれ正とする。また、重力加速度 g は 9.8 m s^{-2} である。

問 1 南北に流れる大規模な海流では、単位体積あたり次のような力の釣り合いが成り立つ。

$$\rho f v = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

この式の右辺と左辺の項で表される力をそれぞれ簡潔に説明せよ。また、このような力の釣り合いによって生じる流れを何と呼ぶか。ここで、f はコリオリパラメータ、ρ は海水の密度、v は北向きの速度，p は圧力である。

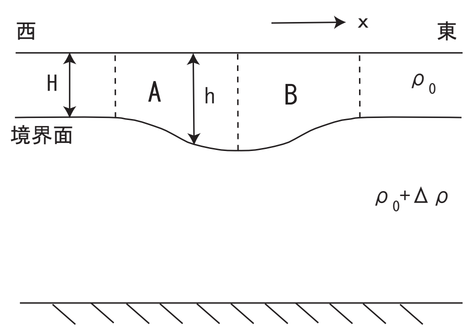
問 2 海洋は温かい表層水と冷たい深層水の 2 層で近似することが出来る。ここでは、表層と深層の境界面が下の図のように東西方向に変化しており、深層には流れが無い場合を考える。表層の厚さを h とすると、領域 A では h は東向きに単調に増加、領域 B では減少している。また、h に南北方向の変化はない。H は領域 A, B 外における表層の厚さであり、一定である。このとき以下の問に答えよ。ただし、海面の変位は h の変化に比べて無視できるとする。

(a) 表層においては、p と h との関係を

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{g\Delta\rho}{\rho_0}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2}$$

と書くことが出来る。このことから、A の領域での流れはどちら向きといえるか。理由とともに答えよ。ここで ρ_0 は表層の海水の密度、$\Delta\rho$ は表層と深層の密度差である。

(b) コリオリパラメータ f が一定で、$1.0{\times}10^{-4}$ s^{-1} の場合を考える。$\rho_0 = 1000$ kg m^{-3}、$\Delta\rho$ =2 kg m^{-3}、領域 A の幅を 100 km、そこでの平均流速を 0.49 m s^{-1} とするとき、$(h - H)$ の最大値を求めよ。



問 3 境界面の形状は問 2 と同様であるが、コリオリパラメータが北に行くほど大きくなる (すなわち $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} > 0$ となる) 場合を考える。以下の問に答えよ。

(a) 以下の空欄にあてはまる適切な語句を、語群より選べ。同じ語句を複数回用いても良い。

領域 A では、流速の絶対値は北に行くほど(　ア　)。流れの向きを考えると、流れは(　イ　)し、このため境界面は(　ウ　)。一方、領域 B では流速の絶対値は北へ行くほど(　エ　)ため、流れは(　オ　)し、境界面は(　カ　)。このため、境界面の形状は時間とともに(　キ　)へ移動する。このような波を(　ク　)という。

語群

東方、西方、北方、南方、下がる、上がる、大きくなる、小さくなる、狭くなる、広くなる、ロスビー波、ケルビン波、慣性振動、時計回りに回転、反時計回りに回転、収束、発散

(b) 問 3(a) の記述に関し、連続の式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

と式 (1), (2) を用いて h に関する方程式を導き、境界面の形状の移動速度を求めよ。ここで、t は時間である。また、$(h - H) \ll H$ を仮定する。

問題 9： 選択問題・地球物理学

以下の問の中から **2 つ**選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

(1) 数値予報の原理について、基礎方程式とその解法の概略を中心に説明せよ。また数値予報の原理上の問題点を挙げよ。

(2) 太平洋赤道域の海洋の表面水温は、西部に比べて東部のほうが低い。その理由を、貿易風、エクマン輸送、コリオリパラメータの緯度変化、をキーワードとして説明せよ。また、エル・ニーニョの時に表面水温はどのように変化するか、その理由とともに述べよ。

(3) エアロゾルとは何かを説明した後、その気候における直接的・間接的役割について説明せよ。

(4) 北太平洋では黒潮や黒潮続流の南方に、亜熱帯モード水と呼ばれる厚い等温層が存在する。それが形成される季節はいつか。また、厚い等温層が黒潮域南方にできる要因を 2 つ以上挙げ、形成メカニズムについて説明せよ。

(5) 成層圏オゾンの分布を決める力学過程と光化学過程を説明せよ。

(6) 北太平洋と北大西洋の高緯度域を比べた場合、海洋表面の塩分が高いのはいずれか、その理由とともに述べよ。さらに、それが海洋深層水形成や深層循環にどのような影響があるかを述べよ。