北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成 21 年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成 21 年 3 月

専門・問題 1

問 1 以下の積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

問 2 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、任意の定ベクトルを $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ とするとき、以下のものを求めよ。

(a) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}))$

(b) $\nabla\times((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{b})$

問 3 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 4 以下の式を満たす複素数 z を求めよ。ただし、i は虚数単位とする。

(a) $z^2 = i$

(b) $e^z = 2i$

専門・問題2

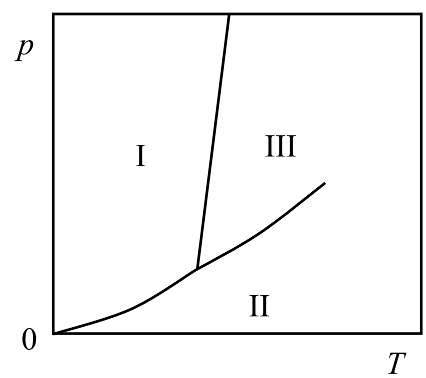
問 1 図は、ある物質が気体、液体、固体の各相に安定して存在できる圧力 (p)、温度 (T) を示した相図である。

(a) I、II、III はそれぞれどの相に対応するか。

(b) 図は水 (H_2O) の相図とは明らかに合わない点がある。それは何か指摘せよ。また、その根拠を、相 i、j 間の境界線の傾き $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{i,j}$ が次のように表されることと関連付けて述べよ。

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{i,j} = \frac{S_i - S_j}{V_i - V_j}.$$

ここで、S_i、S_j は境界で接する相 i、j それぞれのエントロピーで、V_i、V_j は同様にそれぞれの体積である。



問 2 水平面上の直線状の線路を走っている列車を考える。列車内は外気と遮断されていて、列車内に気流はなく、空気の抵抗は無視する。以下の問に答えよ。なお、重力加速度を g とし、天井と床の距離を h とする。

(a) 列車が一定の速度 v で走っている。質量 m の物体が天井から落下した。列車内の観測者から見てどのような運動をし、どこに落ちるか。また床に落下するまでの時間を求めよ。

(b) 列車が一定の加速度 α で加速している。質量 m の物体が天井から落下した。列車内の観測者から見てどのような運動をし、どこに落ちるか。また床に落下するまでの時間を求めよ。

(c) 列車が一定の加速度 α で加速している。質量 m の物体が天井から L の長さの質量の無視できる糸に吊り下げられており、振動している。列車内の観測者から見てどのような振動をするか。また振幅が小さい時の振動周期を求めよ。

(d) 列車が一定の速度 v で走っている。列車の天井から光のパルスを発射し床に到達する。光の速さを c とし、列車内の観測者から見ると、光が床に到達するまでの時間 t' は h/c である。列車の外の静止している観測者から見ると、光は斜めに進む。静止している観測者から見た光が床に到達するまでの時間 t を求めよ。静止している観測者から見ても光の速度 c は変わらず、天井の高さ h も変わらない。t' と t は異なる。これはどんな意味をもつか。

専門・問題 3

下の $u(x,t)$ に関する偏微分方程式 (1) の解を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty) \tag{1}$$

問 1 二つの新しい変数 $\xi = x + ct$、$\eta = x - ct$ を用いることによって (1) 式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{2}$$

と書き換えられることを示せ。

問 2 (2) 式より、(1) 式の一般解は下の (3) 式で表されることを示せ。

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{3}$$

（ここで、$\phi(x-ct)$, $\psi(x+ct)$ は、それぞれ $x - ct$, $x + ct$ の任意の関数）

問 3 (3) 式を利用して、下の (4) 式と (5) 式で表わせられる初期条件のもとでの (1) 式の解を求めよ。

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{5}$$

問 4 問 3 で得られた解を $t = 0$, $t = 1/2c$, $t = 2/c$ について図示せよ。

専門・問題 4

月は常に同じ面を地球に向けている。言い換えれば、月が地球の周りを公転する角速度と、月の自転の角速度は等しい。この関係は偶然の一致であるのか、あるいは何らかの理由で 2 つが同期しやすいのか、考えよう。

　月の赤道は円でなく、地球と月を結ぶ向きの差し渡しがわずかに長い。これに伴う質量分布を理想化し、図 1 のように、半径 r、密度一定で質量が m_1 の球の中心をはさむ両端に、質量 m_2 で大きさが無視できる質点 A、B が固定されているとする。地球と月の中心間の距離を R、地球の質量を M、万有引力定数を G とする。$M \gg m_1 \gg m_2$ とする。

問 1 地球は動かず、月は円軌道をとるとして、公転の角速度 Ω を求めよ。

問 2 予備的な考察として、質量 m_1 の月の球体部分を無視する。図 2 のように、質点 A、B が、地球と直列に並ぶ向きに長さ $2r$ で質量が無視できる棒の両端に固定され、ともに角速度 Ω で公転しているとする (Ω は問 1 で求めたものと同一)。A、B それぞれについて、地球から受ける引力および公転に伴う遠心力を求めよ。これらの比較から、A、B 間の張力 T を求めよ。ただし、T については、$r \ll R$ として、r/R に関するテーラー展開の 2 次以上の項を落として整理した近似解を求めよ。

問 3 問 2 で調べた状態の安定性を調べる。隕石の衝突により、図 3 のように、A、B が速さ v_0 で月の中心の周りに回転する初速を持ったとする (衝突の他の効果は無視する)。v_0 が十分小さければ、AB を結ぶ棒は振動する。図 4 のように、線分 AB と地球-月中心間の線分のなす角を θ として運動方程式をたて、この振動の角振動数 ω ($= 2\pi/$ 周期) を求めよ。なお、ここで θ は十分に小さいと仮定する。θ が十分小さければ、A、B にかかる地球の引力と公転に伴う遠心力の大きさは一定とみなすことができる。本問より図 2 の状態は安定なことがわかる。

問 4 月の球体部分を考慮すると振動の周期は増大する。球体部分について、月の中心を通る軸の周りの慣性モーメント（密度に軸からの距離の二乗をかけて体積積分したもの）を I とする。この場合の角振動数 ω' と ω の比を求めよ。