北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

# 平成19年度大学院修士課程入学試験問題
# 専門科目

必答問題２問は必ず解答すること。選択問題は、数学２問・物理学２問・地球物理学３問、計７問出題されている。その中から２問を選択し、解答すること。１問につき１枚の解答用紙を使用し、解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成18年８月

# 必答問題 I

**問 1** 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とスカラー関数 $\phi = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$ に関して以下を求めよ。

**(a)** $\boldsymbol{r} \cdot \nabla\phi$

**(b)** $\phi\ \nabla \cdot \boldsymbol{r}$

**(c)** $\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{r})$

**(d)** $\nabla\phi \times \boldsymbol{r}$

**(e)** $\phi\ \nabla \times \boldsymbol{r}$

**(f)** $\nabla \times (\phi\boldsymbol{r})$

**問 2** 行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は、原点に対する角度 $\theta$ の反時計回りの回転を表す。

**(a)** 変換前のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と、この行列による変換後のベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ の大きさが変わらないことを示せ。また、上記 2 つのベクトルのなす角が $\theta$ であることを、両者の内積を取ることによって示せ。

**(b)** 次の式で表される楕円

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

を反時計回りに $\pi/4$ 回転させた際の方程式を求めよ。

**問 3** 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = y + f(x)$$

また、$f(x) = x$、$x = 0$ で $y = 0$ の時の解を求めよ。

# 必答問題 II

**問 1** フィギュアスケートのスピンにおいて、スケーターが腕を体に引き寄せると回転が速くなり、腕を伸ばすと回転が遅くなる。この現象を物理的に説明せよ。さらに、下記の現象から同様の法則が働いていると思われるものを 2 つ選び、どのように同じであるか、簡潔に述べよ。

**(1)** リンゴが木から落ちた。

**(2)** 風呂の水を抜いたとき、排水口のそばに渦ができた。

**(3)** コップの中の水をスプーンで回転させると、中央の水面がくぼんだ。

**(4)** コマの回転が弱くなってきたとき、コマは歳差運動した。

**(5)** 惑星の運動においては面積速度が一定である。

**(6)** ボールに回転を与えて投げたとき、ボールの軌道が曲がった。

**問 2** 断熱容器に入った気体の圧縮について考える。この気体は理想気体の状態方程式に従い、定圧比熱 $C_P$ と定積比熱 $C_V$ の比 $\gamma = C_P/C_V$ は 1.5 であると仮定する。なお、気体定数を $R$ とするとき、$n$ モルの気体では、$C_P - C_V = nR$ の関係がある。

**(a)** 断熱の場合の熱力学第 1 法則を式で表せ。また、その式の意味を言葉で説明せよ。

**(b)** 気体の温度を 273K から 546K まで上げるには、気体の体積をどれだけ小さくすれば良いか。

**問 3** 3 次元空間中の質量 $m$ の質点を考える。この質点には保存力しか働いておらず、そのポテンシャルエネルギーが原点からの距離 $r$ の関数として

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 - \frac{1}{8}ka^2r^4$$

で与えられていたとする。ここで、$a$ と $k$ は正の定数である。

**(a)** この質点に働く力を求めよ。質点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とし、力の方向が分かるように書くこと。

**(b)** この質点を原点から速さ $v_0$ で発射したとする。$v_0$ の値による質点の運動の仕方の違いを述べよ。

# 選択問題：数学・問題I

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ について、次の手順で $\exp(\boldsymbol{A})$ を求めてみよう。
ただし、$n$ を正の整数として、

$$\exp(\boldsymbol{A}) \equiv \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n}!}\boldsymbol{A}^{\mathrm{n}} + \cdots,$$

$$\boldsymbol{I} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

**問 1**　$\boldsymbol{A}$ の固有値、固有ベクトル $\left(\lambda_1, \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \;;\; \lambda_2, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ。ただし、固有ベクトルは規格化する必要はない。

**問 2**　行列 $\boldsymbol{P}$ を $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ とする時、$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ が成り立つことを、実際に成分を計算して示せ。

**問 3**　一般に、任意の正方行列 $\boldsymbol{B}$、正則行列 $\boldsymbol{Q}$ に対して、

$$(\boldsymbol{Q}^{-1}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{Q})^n = \boldsymbol{Q}^{-1}\ \boldsymbol{B}^n\ \boldsymbol{Q}$$

および

$$\exp(\boldsymbol{Q}^{-1}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}^{-1}\ \exp(\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{Q}$$

が成り立つことを示せ。ただし、$n$ は正の整数である。

**問 4**　任意の実数 $\alpha$、$\beta$ に対して、$\exp\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \exp(\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(\beta) \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ。

**問 5**　$\exp(\boldsymbol{A})$ を求めよ。

# 選択問題： 数学・問題 II

次の連立常微分方程式を考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + ay, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ax - 2y \tag{2}$$

ここで、$a$ は任意の実定数である。次の問に答えよ。

**問 1** 一般解が有界であるための $a$ の条件を求めよ。

**問 2** $a = 1$ であり、初期条件が $t = 0$ で $x = 2$, $y = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 0$ であるときの解を求めよ。

**問 3** $a = 2$ であり、初期条件が $t = 0$ で $x = 2$, $y = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 1$ であるときの解を求めよ。

# 選択問題：物理・問題 I

細工したペットボトルに水をある程度詰め、ペットボトル内の空気に圧力をかけることで、水を勢いよく噴出させ、ペットボトル・ロケットとして打ち上げることができる。ペットボトルの質量を $M$ とし、ある時刻のペットボトル内の水の質量を $m$ とする。水は、ペットボトルから一定速度 $v$、かつ、単位時間あたり一定質量 $a\left(=-\dfrac{dm}{dt}\right)$ で噴出しているとする。空気抵抗がないものとし、重力加速度を $g$ とする。以下の問に答えよ。

**問 1** ペットボトルをなめらかな水平面に置く。水が水平に噴出しているときのペットボトルの速度変化 $\dfrac{du}{dt}$ を求めよ。

**問 2** 質量 $m_0$ の水が入ったペットボトルをなめらかな水平面に置き、静止状態から水を噴出させた。全ての水が噴出したときのペットボトルの速度 $u_1$ を求めよ。

**問 3** 次に、鉛直下向きに水を噴出した場合の運動方程式を立てよ。なお、鉛直上向きに座標 $z$ を取るものとする。

**問 4** 地面 $(z=0)$ に置かれた質量 $m_0$ の水が入ったペットボトルは、$a$ と $v$ との積 $av$ がある値を超えている場合には上昇する。そのとき、全ての水が噴出した時点でのペットボトルの速度 $u_2$、および、高度 $z_2$ を求めよ。なお、$\log x$ の不定積分は $x(\log x - 1) + C$ ($C$ は積分定数) である。

# 選択問題：物理・問題 II

断面が一辺 $a$ の正方形で長さ $l$ の十分長い ($l \gg a$) 角棒がある。棒に沿って端から $x$ の位置において、その密度 $\rho$ が

$$\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right), \qquad (0 \leq x \leq l)$$

で与えられているとき ($\rho_0$ は定数)、次の問に答えよ。

**問 1** 棒の重心 G の位置を求めよ。

**問 2** 棒を一様な密度 $\rho_L$ ($< \rho_0$) をもつ液体に完全に沈める。棒を水平に保ったとき、浮力が 1 点に集中しているとみなすことのできる点 (着力点) の位置と棒に働く浮力の大きさとを求めよ。

**問 3** 液体中に沈められた状態で棒の重心 G を固定し、G のまわりに自由に回転できるようにしたとき、棒はどんな運動を始めるか、定性的に説明せよ。

**問 4** G のまわりの棒の回転角を $\phi$ とするとき、**問 3** で説明した運動を記述する方程式を求めよ。また、初期条件

時刻 $t = 0$ において、棒は水平に置かれ、静止している

のもとで、棒の回転角速度を $\phi$ の関数で表せ。ただし、棒の運動を妨げる液体の粘性抵抗はないものとし、G を通る回転軸のまわりの棒の慣性モーメントを $I$ とせよ ($I$ を具体的に求める必要はない)。

# 選択問題：地球物理学・問題 I

緯度 $\varphi$ [rad] において、緯度円に沿って帯状平均した大気のもつ絶対角運動量 $M$ は

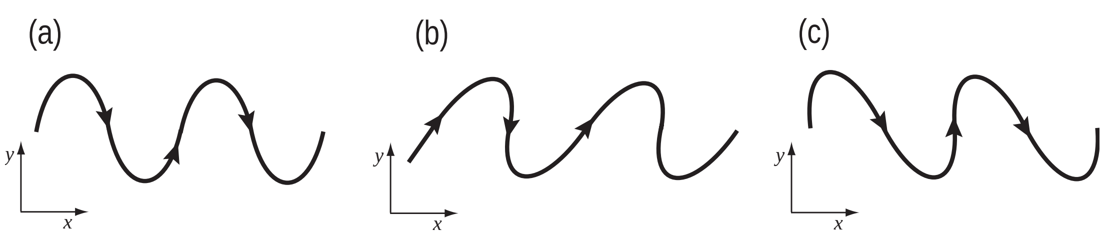
$$M = r\cos\varphi(U + r\Omega\cos\varphi) \tag{1}$$

と表される。ここで、$U$ [m s$^{-1}$] は帯状平均の東西風速、$r = 6.4 \times 10^6$ [m] は地球半径、$\Omega = 7.3 \times 10^{-5}$ [s$^{-1}$] は地球の自転角速度である。次ページの図 1 は、12〜2 月の平均的な $M$ の輸送を流れ関数で示したものである。北半球を見ると、低緯度のハドレー循環に伴う流れと、中緯度の間接循環に伴う流れがあることが分かる。このような北半球の帯状角運動量輸送に関する以下の問いに答えよ。ただし、数値は小数点以下 1 桁とし、単位は問題文中に記されたものを用いること。

**問 1** 図 1 の流れは定常であり、かつハドレー循環内では $M$ が保存していると仮定する。ハドレー循環上端である 200hPa の赤道上では帯状平均風速がゼロであるとき、ハドレー循環の北の境界でのジェット気流の強さ [m s$^{-1}$] を求めよ。

**問 2** 図 1 を鉛直に積分すると、帯状角運動量の南北輸送は、平均子午面循環、停滞性波動、および非定常波動による輸送の和でほぼ説明できる。次ページの図 2 はそれら 3 つの輸送量の緯度分布を北向きを正にとって描いたものである。図 2 中の①〜③はそれぞれどの輸送に対応するか答えよ。

**問 3** 非定常波動が図 2 に示されるような角運動量輸送を行うとき、観測されるであろう中緯度対流圏上層の等圧面高度の等値線はどのようになるか、下図の (a)〜(c) から一つ選べ。また、図にふさわしい説明を以下の (ア)〜(ウ) から一つ選べ。ただし、図中の矢印は地衡風の向きを表す。




(ア) 非定常波動に伴う流れは、帯状平均をとれば正味で赤道向きに角運動量を輸送する。

(イ) 非定常波動に伴う流れは、帯状平均をとれば正味で極向きに角運動量を輸送する。

(ウ) 非定常波動に伴う流れは、極向き・赤道向きどちらにも角運動量を運ぶが、帯状平均では打ち消しあってほぼゼロである。

**問 4** エルニーニョ時に、ハドレー循環が強まり、熱帯中上部対流圏の気温が一様に上昇することが観測されている。このとき、以下の量がどう変化するか、理由とともに簡単に述べよ。ただし、大気–地球系の絶対角運動量は保存しているものとする。

**(a)** 全球で積分した大気角運動量 $M$

**(b)** 一日の長さ

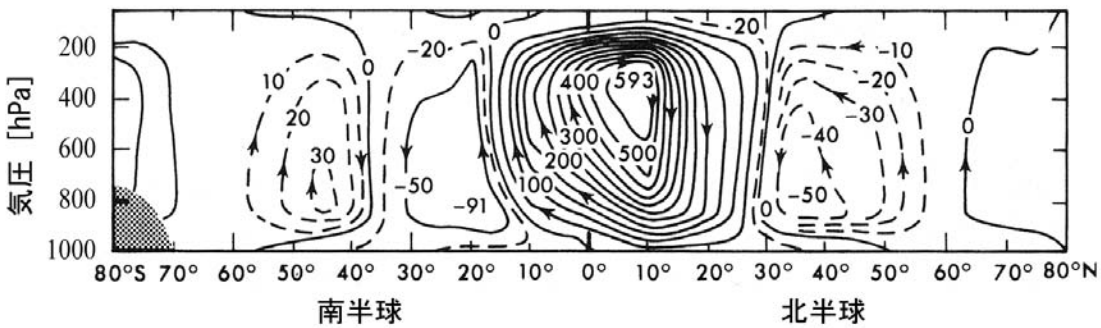



図1

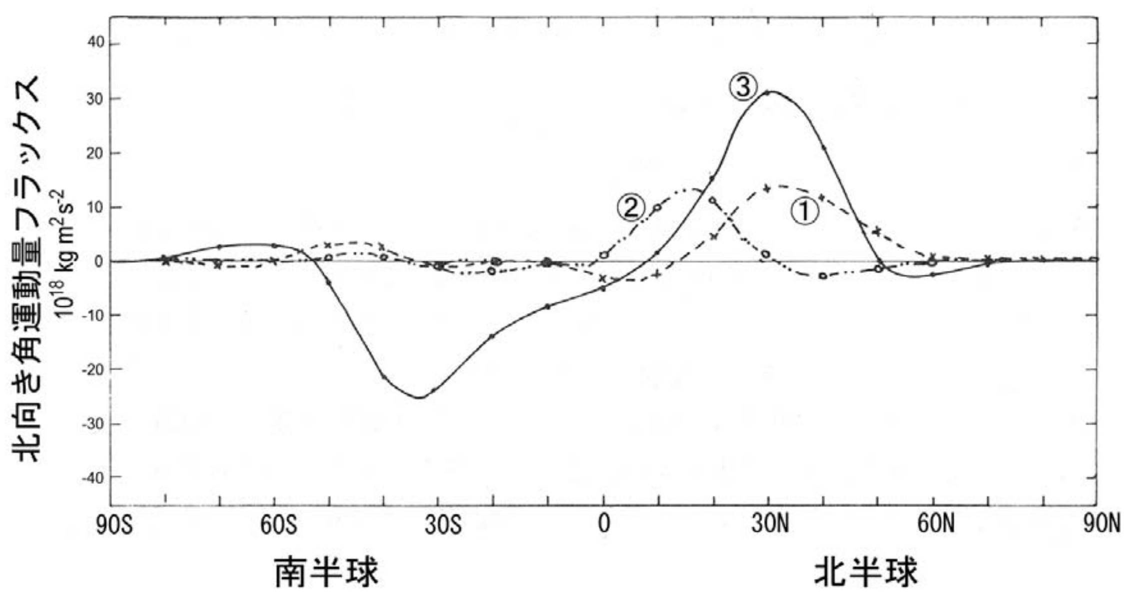



図2

# 選択問題 : 地球物理学・問題 II

黒潮のような海流の形成には、地球が球体であり、また自転していることが重要である。

**問 1** 地球の自転の効果について、以下の問に答えよ。

**(a)** 北緯 30 度におけるコリオリパラメータの値を求めよ。ここで、地球の自転の角速度は $7.3\times10^{-5}$ [$s^{-1}$] とする。

**(b)** 地衡流の関係を用いて、北緯 30 度における黒潮の表面流速を小数点以下 1 桁まで求めよ。ただし、黒潮の幅は 100 [km] で、表面流速は一様であるとする。また、黒潮を挟んだ水位差は 75 [cm] であるとする。

**問 2** 四角い平坦な海において、風が東西方向に図 1 のように吹いているものとする。次ページの図 2 には、図 1 の風によって引き起こされる流れ (左列) と海面水位 (右列) が示されている。このとき、以下の **(a)** から **(c)** の場合について、流れと海面水位の適切な組み合わせをそれぞれ次ページの図 2 の A,B,C の中から選べ。また、それぞれの場合について、なぜそのような流れと水位の分布になるのかを説明せよ。

**(a)** 地球が自転していない場合

**(b)** 地球は自転しているが、コリオリパラメータが一定である場合

**(c)** 地球が自転しており、かつ、コリオリパラメータが緯度とともに増加する場合

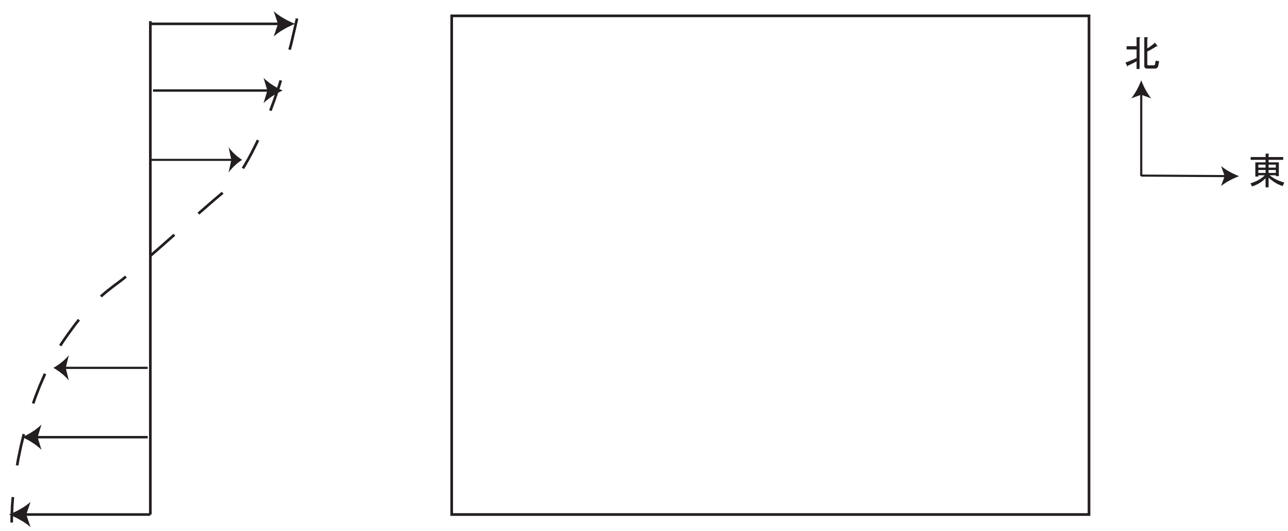



図 1: 風の分布 (左図) と海洋の形状 (右図)

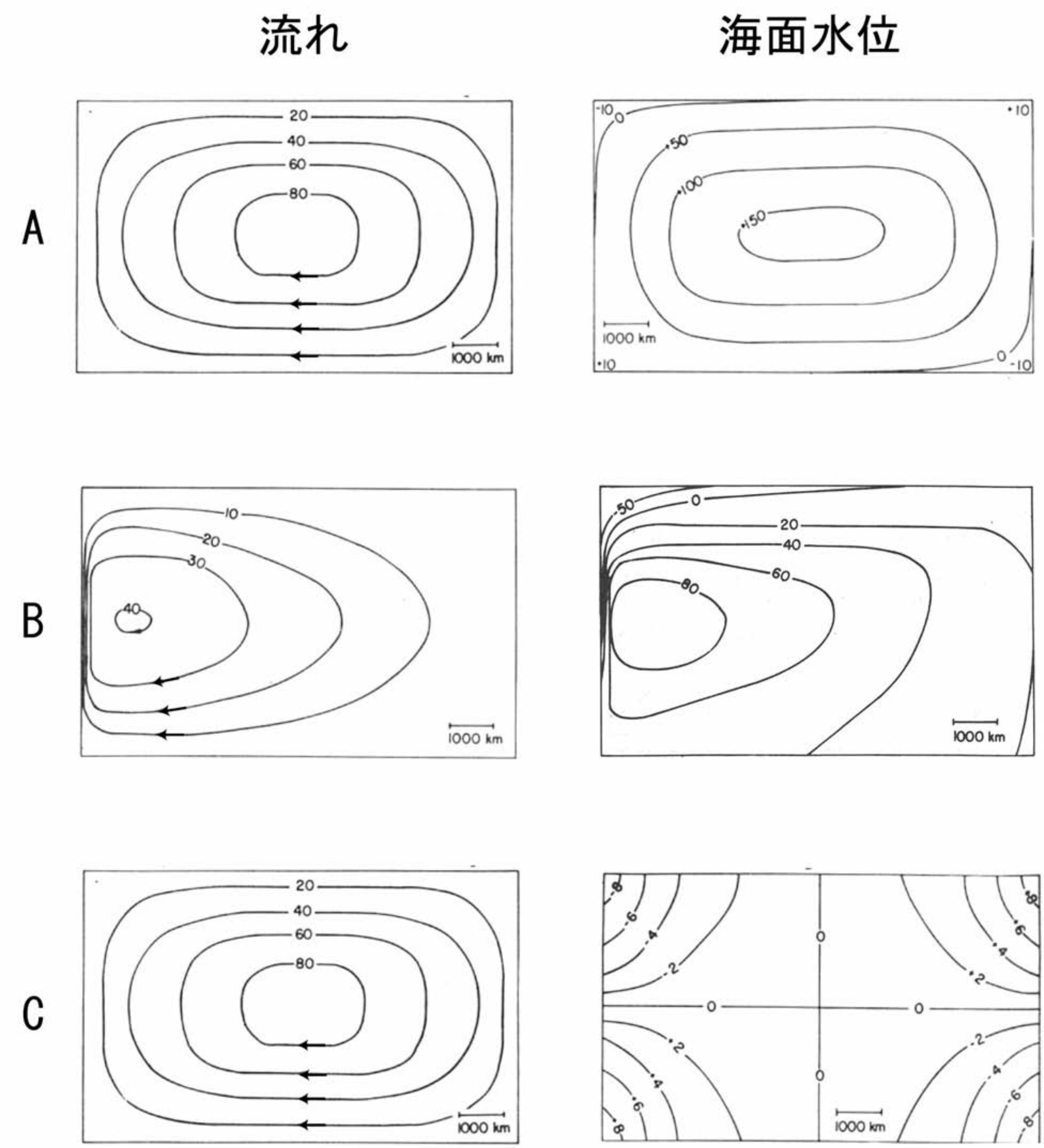



図 2: 図 1 の風によって引き起こされる流れ (左列) と海面水位 (右列)

# 選択問題：地球物理学・問題 III

以下の 6 問の中から **2 つ**を選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

**(1)** ポテンシャル渦度（渦位) の保存について説明せよ。また、ロスビー波の位相速度が西向きである理由について、ポテンシャル渦度をキーワードとして説明せよ。

**(2)** 北太平洋において、冬季、海洋から大気への熱の放出がもっとも盛んな海域はどこか。また、その海域で熱の放出が盛んな理由を 2 つ以上挙げよ。

**(3)** 雲の存在は、太陽からの短波放射および地球表面からの長波放射に影響することで、気候の形成や変動に重要な役割を果たしている。光学的に厚い雲が、対流圏の下層にある場合と、対流圏の上層にある場合では、大気放射と気候に与える作用がどのように異なるか説明せよ。

**(4)** グリーンランド沖や南極周辺など極域の沿岸域では、高密度の海洋深層水が形成されている。そのような高密度の海水が形成される理由を、海氷と塩分をキーワードとして説明せよ。

**(5)** 北半球夏の南アジアモンスーンは、地球上で最大規模の季節風で特徴付けられる。この南アジアモンスーンについて、春から夏にかけての降水分布と大気循環の季節変化に注目して説明せよ。

**(6)** 2 日〜1 週間程度の短期の気象予測と、地球温暖化に関連して行われている 50〜100 年後の気候予測は、ともに大気大循環モデル (AGCM) を用いるという点では共通しているが、異なっている点も複数ある。予測対象の違いに注目して、両者の予測可能性について説明せよ。