北海道大学大学院環境科学院
地球圏科学専攻
大気海洋物理学・気候力学コース

平成18年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計4問出題されている。その全てに解答すること。1 問につき 1 枚の解答用紙を使用し、解答用紙には問題番号を記入すること。

平成18年2月

専門・問題 I

次の行列に関して以下の問いに答えなさい。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

問 1　行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式の値を求めなさい。

問 2　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めなさい。

問 3　それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい。

問 4　**問 3** で求められた 3 つの固有ベクトルが一次独立であることを証明しなさい。

専門・問題 II

以下の問に答えよ。

問 1 質量 1kg の物体を速さ 200m/s で、質量 4kg の静止した物体に衝突させた。衝突後は、２つの物体はくっついたまま同じ速度で移動した。２つの物体は同じ材質で出来ており、その比熱を 500J/(kg・K) とする。なお、物体には摩擦は働かず、また、衝突の際に音や光は生じないものとする。

(a) 衝突後の物体の速さはいくらか。

(b) 衝突前の物体の温度は共に 300K であった。衝突後の物体の温度はいくらになると予想されるか。

問 2 中身の入っている常温の缶ジュース、完全に凍らせた缶ジュースと中身を飲み干して空になった缶ジュースの缶の３つが斜面を滑ることなく転がりながら下るとする。下に降りる速さの順番はどうなるか。その理由も述べよ。必要に応じて、式を用いてもよい。

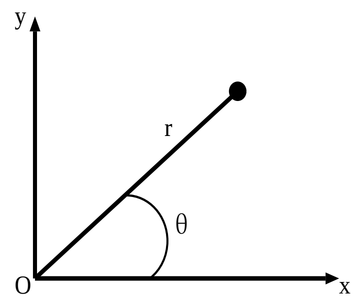
問 3 ある高度での大気圧はその上に存在する空気の重さで決まる。すなわち、空気の密度を ρ、重力加速度を g、鉛直上向き座標を z としたとき、

$$p(z) = \int_z^\infty g\rho(z')\ dz'$$

である。大気の温度が一定値 T_a であり、大気が理想気体からなるとしたとき、圧力の鉛直分布を z の関数として求めよ。ただし、地表 $(z=0)$ での大気圧を p_0 とする。また、g は定数であると仮定する。その他必要な定数があれば自分で定義して用いよ。

問 4 **問 3** では、大気の温度を一様としたが、現実には、通常、山の上の気温の方が麓よりも低い。これは、麓の空気が山の上へ移動したり、山の上の空気が降りてきたりすることによる。何故、高いところほど気温が低くなるのか、熱力学の法則に基づいて説明せよ。

専門・問題 III



平面上の位置を指定するときにデカルト座標 (x, y) がしばしば用いられるが、図のように極座標 (r, θ) を用いると便利なことも多い。ここで、(x, y) と (r, θ) には

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

という関係がある。このとき、以下の問に答えよ。

問 1 偏微分

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \ \frac{\partial r}{\partial y}, \ \frac{\partial \theta}{\partial x}, \ \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

を r、θ で表せ。

問 2 平面上で定義されたスカラー関数 U に関して、

$$\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$$

であることを示せ。ここで、$\vec{i}, \vec{j}$ はそれぞれ x 方向、y 方向の単位ベクトル、$\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ はそれぞれ r 方向、θ 方向の単位ベクトルであり、

$$\vec{e_r} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta, \quad \vec{e_\theta} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$$

である。

問 3 ベクトル場 $\vec{A}$ を

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} = A_r\vec{e_r} + A_\theta\vec{e_\theta}$$

と書くとき、A_x, A_y を A_r, A_θ で表せ。また、

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

を示せ。

問 4 演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を極座標で表し、

$$\nabla^2 U = \rho(r), \qquad \rho(r) = \begin{cases} 1 & 0 < r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

を解いて $U(r)$ を求めよ。ただし、U は連続かつ 1 階微分も連続な関数で、また $U(0) = 0$ とする。

専門・問題 IV

ブランコは人が漕ぐことによって振幅を増す振り子である。このことを簡単なシステムで考えてみよう。

問 1 図 1 の様な支点と質量 m のおもりを重さの無視できる長さ l の棒でつないだ振り子を考える。おもりの運動を支配する方程式 (θ に関する式) を立てよ。

問 2 **問 1** で得た方程式で、振れ角 θ の大きさが 1 より十分に小さいと仮定し、方程式を解き、この振り子の周期を求めよ。

問 3 ブランコを漕ぐときには、ブランコの上で立ったりしゃがんだりの動作を繰り返す。これは支点とおもりの距離を周期的に変えていることに相当する。そこで、 図 2 のように、おもりが $\theta = 0$ の点に向かうときの支点とおもりの距離を l_1、$\theta = 0$ の点からおもりが外向きに動くときの距離を l_2 ($l_2 < l_1$) とする。おもりと支点の距離は、$\theta = 0$ の時と $d\theta/dt = 0$ のときに瞬時に変わるとする。そのときにはおもりの角運動量は変化しない。

初期に、$\theta = \theta_0$ で速度ゼロの状態から出発したおもりが、往って戻ってきたとき、振れ角の最大値はいくらになるか。振れ角 θ の大きさが 1 より十分小さいとして、求めよ。

問 4 振幅が増大する理由を、エネルギーの増加をもたらす仕事も含めて、 言葉で説明せよ。

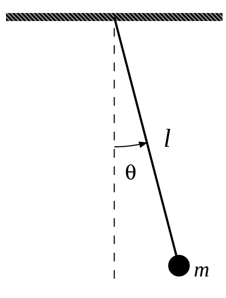


図 1

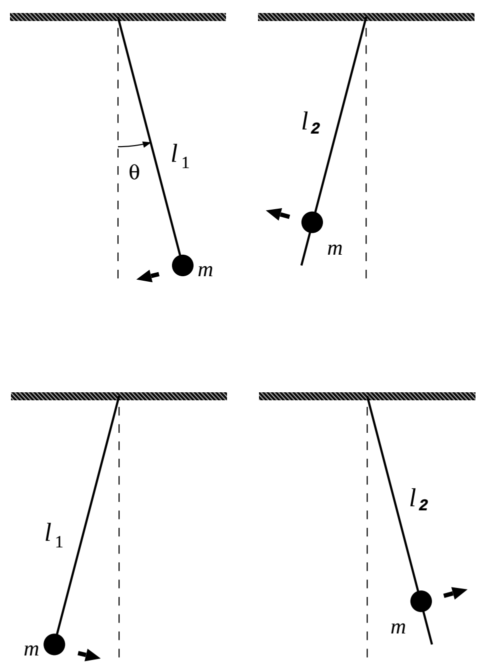


図 2