北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成17年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題2問は必ず解答すること。選択問題は、数学2問・物理学2問・地球物理学3問、計7問出題されている。その中から2問を選択し、解答すること。解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成 16 年 8 月

必答問題 I

問 1 以下の積分を行え。

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$

ここで、積分領域 A は原点を中心とする半径 r_0 の円領域。

問 2 $x(t)$ に関する次の初期値問題を考える。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + ax = 0 \qquad x(0) = 1,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{1}$$

ここで、a は実定数とする。以下の問に答えよ。

(a) $a \neq 1$ の場合について、(1) を解け。

(b) $a = 1$ の場合の解を求めよ。前問 (a) の解における $a \to 1$ の極限からも求めることができる。

(c) a の値によって解がどのように変るか。$a < 0$, $0 < a < 1$, $a > 1$, それぞれの場合について $x(t)$ の概略を図示せよ。

問 3 (x, y, z) 座標での成分が $(y^2, 2xy + z^3, 3yz^2)$ であるベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー関数 $\phi = xy^2 + yz^3$ を考える。以下のものを求めよ。

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

(b) $\nabla \times \boldsymbol{A}$

(c) $\nabla\phi$

(d) $\nabla\phi \times \boldsymbol{A}$

(e) $\nabla \times (\phi\boldsymbol{A})$

必答問題 II

問 1 スパイダーマンが地上 a m のマンションの屋上から地上に飛び降りた。降り立った地点がマンションの縁から b m (飛び立った地点からの水平距離）離れた地点であった。重力加速度を g として、以下の問に答えよ。なお、このスパイダーマンは自身には動力源はなく、空中では純粋にニュートン力学に従うとする。また空気抵抗は無視する。

(a) スパイダーマンが真っ直ぐ真横（水平）に飛び出したと仮定した場合にその初速度を求めよ。

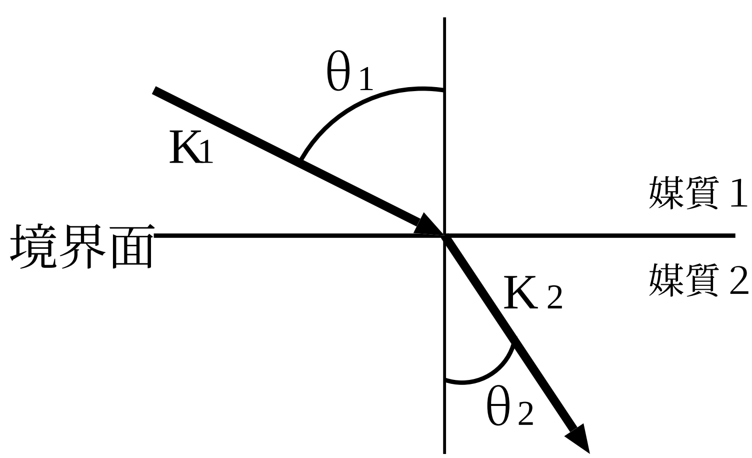
(b) スパイダーマンが上向き 45 度の方向にジャンプして飛び降りた場合にその初速度を求めよ。

問 2 次の文章を読み、問 (a)、(b) に答えよ。

下図に示される 2 種の媒質 1、媒質 2 があり、各媒質中を伝播する平面波の位相速度をそれぞれ c_1、c_2 とする。媒質 1 を伝播する振動数 ω_1、波数 K_1 の平面波が、境界面において屈折し振動数 ω_2、波数 K_2 となって媒質 2 に透過していく場合を考える。入射角を θ_1、透過角を θ_2 とすると、境界面において、入射波と透過波の振動数には $\omega_1 = \omega_2$、波数には $\boxed{\quad ① \quad}$ という関係を見出すことができる。

(a) $\boxed{\quad ① \quad}$ にあてはまる K_1、K_2 の関係式を答えよ。

(b) $c_1, c_2, \theta_1, \theta_2$ を用いて屈折の法則を導け。なお、一般的に平面波において振動数 ω、波数 K、位相速度 c の間には $\omega/K = c$ という関係がある。



選択問題： 数学・問題I

フーリエ変換を用いて、次の熱伝導方程式を解くことを考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

ただし、$u(x,t)$ は、$t \geq 0,\ -\infty < x < \infty$ にて定義され、$|x| \to \infty$ の時 $u \to 0$, 初期条件 $u(x,0) = f(x)$ であるとする。

また、$u(x,t)$ のフーリエ変換を $U(\xi,t)$ とすると、

$$U(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi,t)\ e^{ix\xi}\ d\xi$$

が成り立つ。以下の問に答えよ。

問 1 $U(\xi,0)$ を $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\xi)$ を用いて示せ。

問 2 (1) 式の左辺をフーリエ変換し、$U(\xi,t)$ で表せ。

問 3 (1) 式の右辺をフーリエ変換し、$U(\xi,t)$ で表せ。ただし、$|x| \to \infty$ の時 $\partial u/\partial x \to 0$ であることに注意せよ。

問 4 $U(\xi,t)$ を求めよ。

問 5 $u(x,t)$ を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t\xi^2 + iX\xi)\ d\xi = e^{-X^2/(4t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-tZ^2\}\ dZ = \sqrt{\pi/t}\ e^{-X^2/(4t)}$$

（$Z = \xi - \frac{iX}{2t}$）を用いてよい。

問 6 $f(x) = \delta(x)$ の時に、$u(x,t_1)$（$t_1 > 0$）を図示せよ。ただし、$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数で、

$$x \neq 0 \text{ の時 } \delta(x) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

$$\text{任意の関数}\phi(x)\text{ に対して } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x) dx = \phi(0)$$

を満たす。

選択問題：数学・問題 II

連立一次方程式、$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

を解くことを考える。次の問に答えよ。

問 1 行列 $\boldsymbol{A}$ を下三角行列 $\boldsymbol{L}$ と上三角行列 $\boldsymbol{U}$ の積、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$、として表すことができたとする。ただし

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

である。この時、容易に $\boldsymbol{x}$ を求めることができる。その手順を説明せよ。まず、$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ と置いてみよ。

問 2 具体的に $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{U}$ を求める手順を $n = 2$ の場合について考える。

(a) $\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{U}$ を満たすような行列 $\boldsymbol{M}$ の要素 m と $\boldsymbol{U}$ の要素 u を、a_{ij} を用いて表せ。ただし、具体的な $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{U}$ の形は以下の通りである。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

(b) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-\mathbf{1}}$ は次のように表せることを示せ。

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{bmatrix}$$

問 3 次の連立一次方程式を上記のやり方に沿って解け。途中の過程も記せ。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ただし、$\boldsymbol{M_2 M_1 A} = \boldsymbol{U}$,

$$\boldsymbol{M_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{M_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

の時、次の関係を用いてよい。

$$\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{M_2 M_1})^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

選択問題：物理・問題I

質量m、半径rの密度一様な円板の外周に糸を巻きつけたヨーヨーがある。このヨーヨーの糸（長さをhとする）をいっぱいに巻き糸の端を手で固定する。その状態から、初速度なしに円板を自由落下させると、糸が解けて円板は回転しながら鉛直下方に下降する。糸の太さ・質量は無視でき、摩擦はないものとして、以下の問に答えよ。なお、重力加速度をgとし、自由落下し始める時刻を0とする。

問1 この円板の慣性モーメントIを求めよ。

問2 下降中における、ヨーヨーの重心の運動方程式（円板の径は十分小さいとしてよい）と、重心の回りの回転に対する運動方程式を示せ。必要な変数は適宜、定義せよ。

問3 ヨーヨーが下降する際、時刻tにおける円板の落下速度及び糸の張力を求めよ。

問4 ヨーヨーの糸がすべて繰り出された後、円板は糸を巻き取りながら上昇に転ずる。上昇時における円板の上昇速度及び糸の張力を時刻tの関数として求めよ。

問5 問4で記したように上昇に転じたあと、円板は最大どこまで上昇するか。

問6 糸が解かれつつある時、円板が常に一定の位置に止まっているようにするには、糸の上端をどのように動かせばよいか。

選択問題：物理・問題 II

下図のように、大きな水槽に長さ l の細い管がついている容器を考える。はじめ管のバルブを閉めておき、水面から管までの深さが H となるように水をためる。その後時刻 $t=0$ にバルブを開放し、水を流出させた。以下のようにして、管の出口における流速の時間変化 $q(t)$ を求めることを考える。なお、水槽の容量に比べ流出量は十分小さいため、H は時間によらず一定とする。また水の粘性も無視できるものとする。

問 1 速度ポテンシャル ϕ を定義できる流れ $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$ は渦なし流れであることを示せ。

問 2 渦なし流れの場合、運動方程式を積分することにより

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz=C \tag{1}$$

を導くことができることを示せ。ここで、$q=|\boldsymbol{u}|$、P は圧力、ρ は水の密度、z は鉛直方向の座標、g は重力加速度である。また、C は定数である。

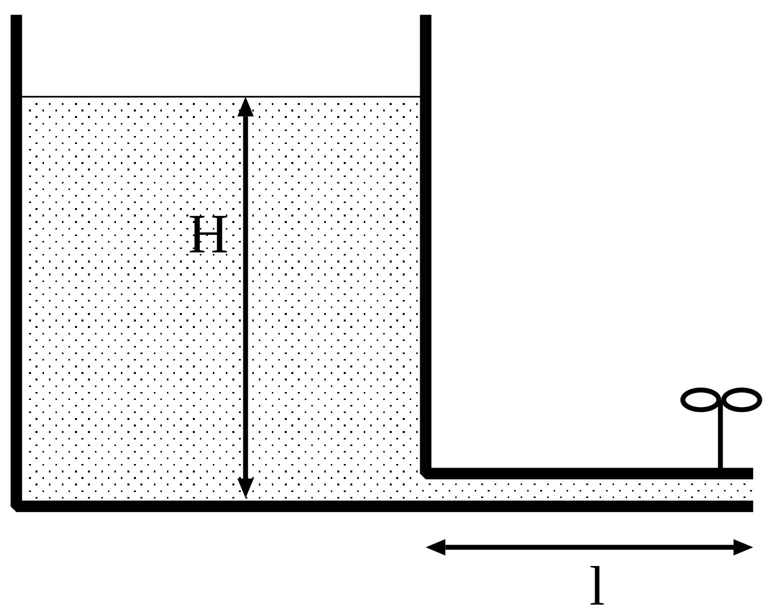
問 3 まず、十分時間がたち管からの流出量が定常となったときのことを考える。この時、出口での流速を求めよ。ただし、水槽は十分大きく、その中の流速を無視できるものとする。

問 4 次に、$t=0$ からの流速の時間変化を求める。以下の問に答えよ。

(a) 管内では $u=q(t)$ の一次元渦なし流れである。この時の速度ポテンシャル ϕ を求めよ。ここで、管に平行に x 軸をとり、q は時間 t のみの関数とする。また、管の出口 $(x=l)$ における速度ポテンシャルはどのようになるか、答えよ。

(b) 問 2 の (1) 式を適用し、水面および管の出口での条件を用いて、$q(t)$ に関する微分方程式を導け。

(c) 前問 (b) で導いた微分方程式を解いて、$q(t)$ を求めよ。



選択問題：地球物理学・問題 I

湿潤大気の構造および安定性に関する以下の問に答えよ。

問 1 次ページの図 1 は、熱帯のある地点における大気の鉛直構造を表している。図中の 3 本の曲線はそれぞれ、温位、相当温位、飽和相当温位と呼ばれる量である。

(a) 上記の各量はそれぞれ図中の①〜③ のどれにあたるか、答えよ。

(b) 上記の各量の物理的な意味を説明せよ。必要ならば概略的な図を用いてもよい。

問 2 図 1 のような鉛直構造をもつ大気において、何らかの大規模運動によって下層に収束が生じると積乱雲が発達する。この過程をパーセル法の考え方を用いて説明せよ。説明には以下の語のうち 2 つ以上を用いること。

（　条件付不安定　　対流有効位置エネルギー　　自由対流高度　　浮力　）

問 3 問 2 のような積雲対流の発達過程は、たとえば台風の成長を説明するときにも有効である。最も簡単な台風のモデルとして、湿潤大気において低気圧性回転をしている軸対称な円形渦の初期値問題を考える。次ページの図 2 に示された模式図を参考にして、以下の問に答えよ。

(a) 渦の下層の大気境界層に摩擦が働いていると、どのような流れが生じるか、理由とともに述べよ。

(b) 前問 (a) で記された過程の結果、渦の中心付近で積雲が発達する。積雲に伴う 2 次循環の存在により、下層では中心に向かう流れのせいで渦の半径が小さくなる。このとき、渦の強さはどう変化するか、 またそれは何故か。

(c) 上記の (a)、(b) の 2 つの過程の繰り返しで説明されるような、積雲対流と大気循環が結合して擾乱の振幅が増大してゆく過程は何と呼ばれているか。

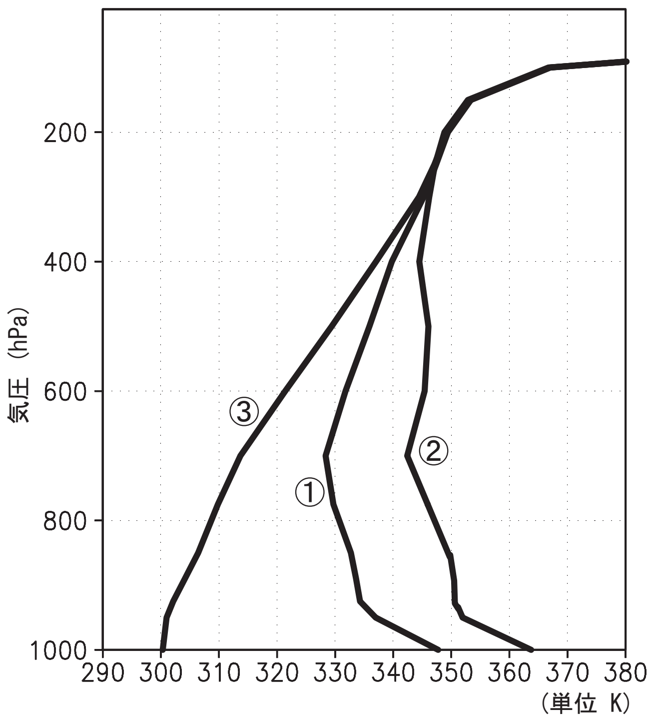

200
400
600
800
1000
気圧 (hPa)
290 300 310 320 330 340 350 360 370 380
(単位 K)
①
②
③

図 1

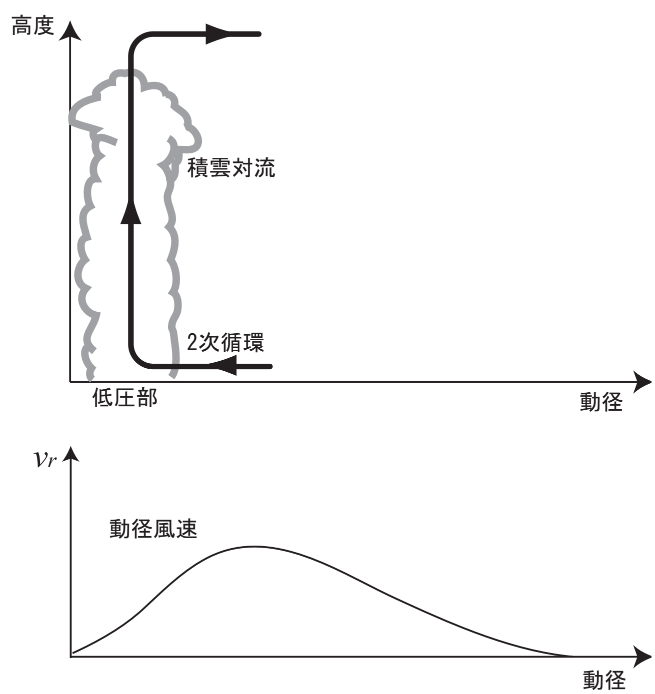

高度
積雲対流
2次循環
低圧部
動径
v_r
動径風速
動径

図 2

選択問題：地球物理学・問題 II

次ページの図 1 は南半球の東経 140 度線に沿って観測した 1 月の海洋の水温 (ポテンシャル水温) と密度 ρ (図 1 では 1000 kg m^{-3} を引いている) の鉛直構造である。図 1 を見て以下の問に答えよ。ただし、図の縦軸である圧力は概ね深さに対応し、1db ≈1m であるとしてよい。

問 1 C 点における水温の鉛直構造を見ると、表面付近に高温層が存在する。この高温層はどのように形成されたと考えられるか、答えよ。その下の概ね 200db 深から 500db 深には水温と密度の比較的均一な層が存在する。この均一な層はどのように形成されたと考えられるか、答えよ。

問 2 A 点における水温の鉛直構造を見ると、概ね 100db 深から 400db 深にかけて水温の逆転が生じている。観測値に基づいて、A 点における 100db 深から 400db 深までの水温-塩分のおおまかな分布を示し (11 ページの図 2 に倣って解答用紙に T-S ダイヤグラムの概略を書くこと)、水温逆転が生じても密度成層が安定して存在する理由について説明せよ。

問 3 B 領域はより高緯度側と低緯度側との境界にあたり、海洋構造の南北変化が大きい。運動方程式は簡略化され

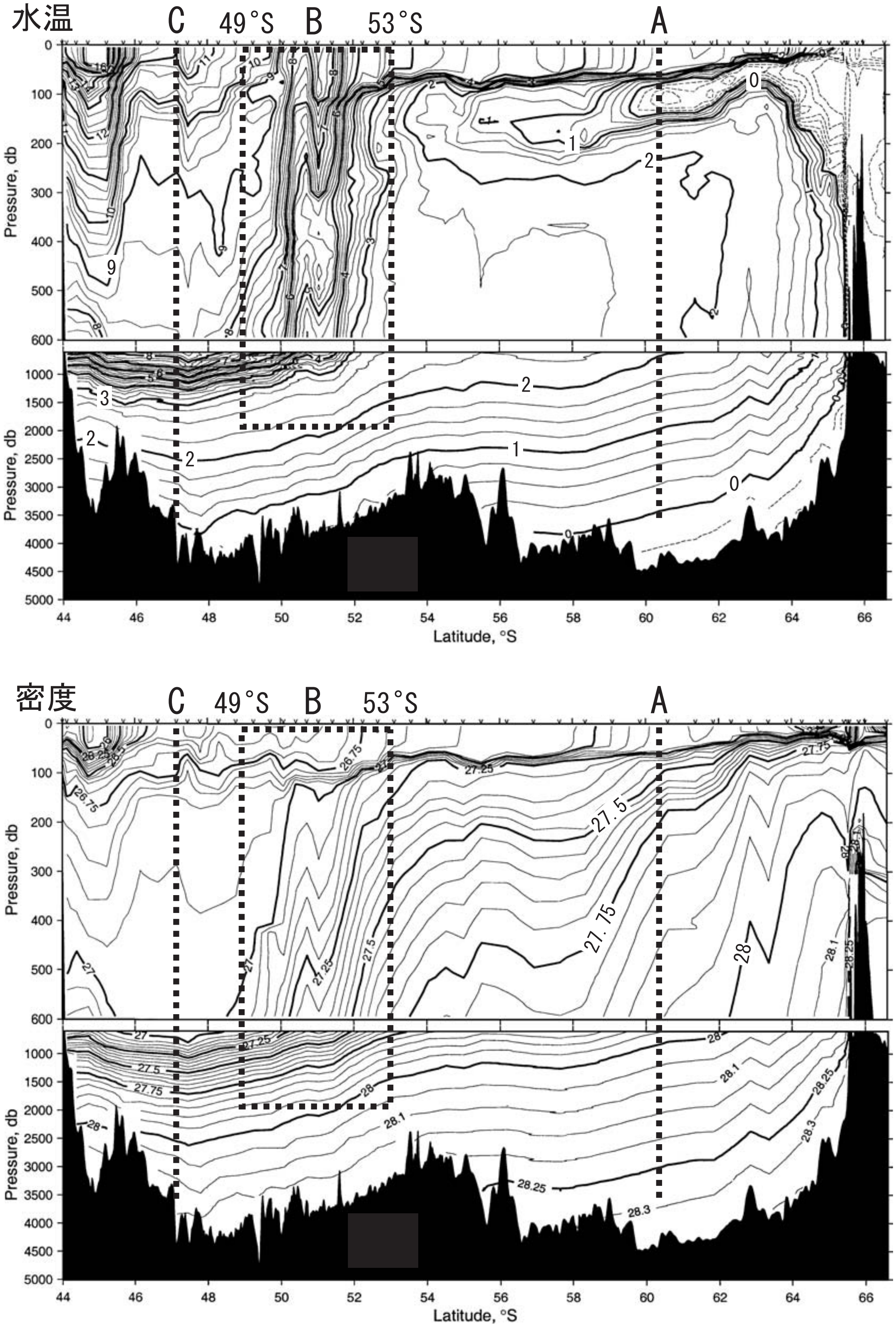
$$f\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla_h P,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

が成り立っているものとして、以下の問に答えよ。ここで、$\boldsymbol{v}$ は水平流速ベクトル、P は圧力、$\boldsymbol{k}$ は z 軸 (鉛直上向き) 方向の単位ベクトル、∇_h は水平面内における 2 次元の勾配、g は重力加速度、f はコリオリパラメータである。

(a) B 領域における平均的な流れの向きはどちらになるか？上の式にもとづいて述べよ。簡単な図を用いてもよい。なお海底近傍での流速は十分小さいものとする。

(b) B 領域内の海面における流速が一様に 0.1 m s^{-1} であったとすると、B 領域の南端と北端の海面力学高度はどちらがどれだけ高いか？コリオリパラメーターは -1.1×10^{-4} s^{-1}、重力加速度は 9.8 m s^{-2}、緯度 1 度の長さは 110km であるとして計算せよ。



(Sokolov and Rintoul 2002, *J.Mar.Sys.*, **37**, 151–184)

図 1

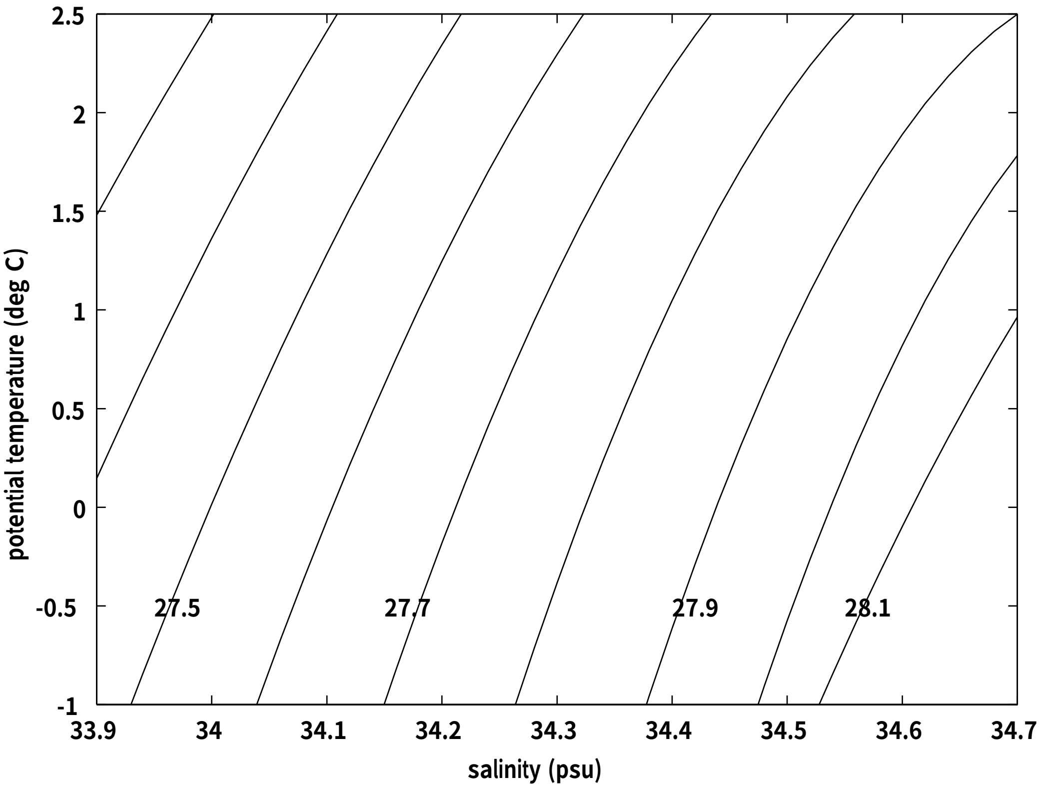

2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
33.9
34
34.1
34.2
34.3
34.4
34.5
34.6
34.7
potential temperature (deg C)
salinity (psu)
27.5
27.7
27.9
28.1

図 2

選択問題：地球物理学・問題III

以下の 5 問の中から **2 つ**選び、それぞれ 300 字程度で答えよ。式や図を用いてもよい。

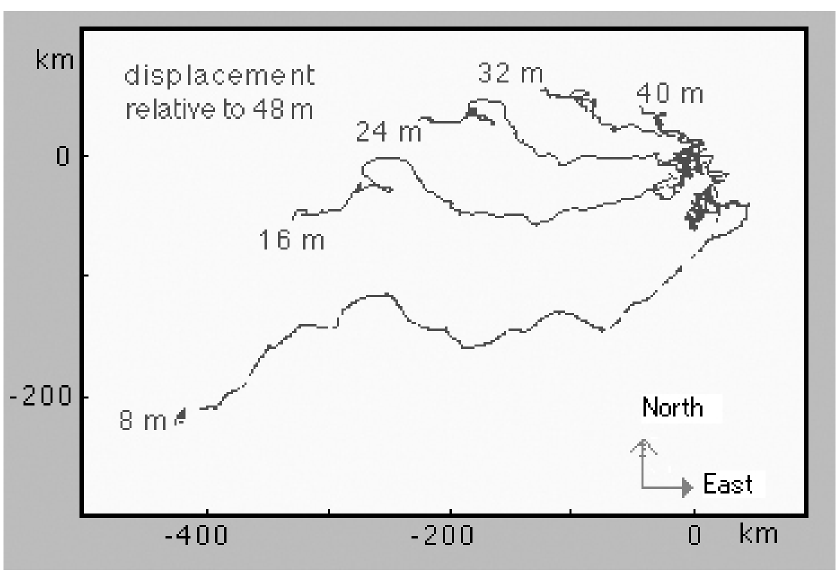
(1) 東西一様な西風ジェットが存在する場に生じうる順圧不安定の力学的メカニズムについて、不安定の条件および成長する擾乱の構造を説明せよ。

(2) 下の図は、北半球 (北緯 37 度) のある地点において海洋表面付近 (8m から 40m まで) の 5 層で流速・流向を観測し、48m 深での流れを差し引いたものを、各層で半年間積算した結果である。図から読み取れる流れの鉛直構造の特徴について考察せよ。そのような流れは一般に何と呼ばれるか。そのような流れの構造を生じる力学的メカニズムについて説明せよ。

(3) 中緯度の移動性高低気圧において、一般に高気圧中心付近よりも低気圧中心付近の方で等圧線が密に存在する。これは何故か、力のバランスに基づいて説明せよ。

(4) 塩分がほとんどない湖と塩分が 34psu でほぼ一様な海があるとする。夏から冬にかけて表面からの冷却が進んで結氷に至る経過を考えた場合、湖と海の最終的な水温はそれぞれどの程度になるか、その過程で水塊は鉛直的にどのように運動し、それぞれの水温はどのように変化するのかについて説明せよ。

(5) 人工衛星に搭載された海面高度計は海面における流れを測る有力な測器である。海面高度計センサーが実際に計測している量は何か。また、他にどのような量を計測し、力学的近似および補正を用いることで海面での流れを求めることができるのか説明せよ。



(Chereskin 1995, *J.Geophys.Res.*, **100**, 18261–18270)