北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座 (物理系)

平成16年度大学院修士課程 (2次募集) 試験問題
専門科目

数学・物理学 (古典物理学) より計4問出題されている。その全てに解答すること。解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成16年3月

専門・問題 I

以下の問に答えよ。

問 1 3 次元空間における、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、任意の定ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とするとき、次の (a)、(b) を求めよ。

(a) $\nabla \cdot \{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\}$

(b) $\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$

問 2 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{x - \sin x}$$

問 3 次の微分方程式を解け。$z = \dfrac{y}{x}$ とおいて考えよ。

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

問 4 複素変数 z および ζ に対して、

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \qquad (a \text{ は正の実定数})$$

なる変換を考える。このとき、ζ 平面上の原点を中心とする半径 a の円は、z 平面上ではどのように表されるか。図示せよ。

専門・問題 II

問 1 質量 m のボールを地上からまっすぐ上に初速度 v_0 で投げ上げる。重力加速度は一定値 g とする。ボールには速度 v に比例する抵抗力が働き、抵抗係数を β とする。鉛直上向きに z 座標をとり、地上を $z = 0$ とする。次の (a)、(b)、(c) に答えよ。

(a) このボールに対する運動方程式を書け。

(b) (a) で得た方程式からこのボールの力学的エネルギー $E(= \frac{1}{2}mv^2 + mgz)$ の時間変化を記述する方程式を導出せよ。

(c) 投げ上げてから最高地点まで達する時間と最高地点から初期位置まで落下する時間は、どちらが長いか。それとも同じか。(b) で得た式に基づいて理由も含めて答えよ。

問 2 $PV = RT$ に従う 1 モルの理想気体を考える。ここで P は気圧、V は体積、T は温度、R は気体定数である。次の (a)、(b)、(c) に答えよ。ただし、気体の定圧モル比熱を C_p、 定積モル比熱を C_v とする。

(a) 熱力学の第一法則を式で表せ。また、各項の意味を説明せよ。

(b) 熱力学の第一法則から C_p と C_v の関係を求めよ。

(c) 気体がピストンのついたシリンダー内にあり、外から一定の熱 Q が加えられたとする。ピストンを固定した場合の温度上昇量 ΔT_v とピストンにかかる圧力を一定にした場合の温度上昇量 ΔT_p の比 $\dfrac{\Delta T_v}{\Delta T_p}$ の値を求めよ。ただし、気体は 2 原子分子であるとする。

専門・問題 III

区間 $(-\infty, +\infty)$ において可積分である関数 $f(x)$ に対して、

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \tag{1}$$

を関数 $f(x)$ のフーリエ変換と呼ぶ。また、その逆変換は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy \tag{2}$$

と表される。

以下の問に答えよ。

問 1 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-cx} dx$（$c$ は正の実定数）を求めよ。

問 2 $e^{-a|x|}$ （a は正の実定数）のフーリエ変換を求めよ。

問 3 $F(-x)$ のフーリエ変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(-x) e^{-ixy} dx$$

は $f(y)$ となることを示せ。

問 4 次の関係式が成り立つことを示せ。ただし、関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ のフーリエ変換を、それぞれ $F_1(y)$, $F_2(y)$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-x) f_2(x) dx$$

問 5 問 2 および問 4 の結果を用いて

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \qquad （a, b \text{ は正の実定数}）$$

を求めよ。

専門・問題IV

下の図のように二つの質量 m の物体が同じばね定数 k のばねで連結され摩擦のない面上に水平に置かれている。ばねの両端は固定され、端と物体の重心および物体の重心間の距離は a となっている。物体は、ばねの方向のみに運動できるとする。また、空気抵抗は無視する。以下の問に答えよ。

問 1 座標の原点を左端とし、左の物体の重心の x 座標を $a+x_1$、右の物体の重心の x 座標を $2a+x_2$ として、それぞれの物体に対する運動方程式を書け。

問 2 x_1, x_2 を、$x_1 = Re(A_1 e^{i\omega t}), x_2 = Re(A_2 e^{i\omega t})$ とおく。ここで A_1, A_2 は複素数の定数、ω は角振動数、$Re(z)$ は z の実数部分を表す。この式を運動方程式に代入して、A_1, A_2 がゼロでないという条件を満たす 2 つの振動数を求めよ。これらの振動数に対応する振動を基準振動という。

問 3 2 つの基準振動はそれぞれどんな運動か。2 つの物体の運動に着目し、言葉で説明せよ。

問 4 左の物体を平衡の位置から ε だけ変位した位置（$x_1 = \varepsilon$）で押さえ、右の物体を平衡の位置（$x_2 = 0$）で押さえ、$t = 0$ で静かに離した。 その後物体はどのような運動をするか。x_1, x_2 を時間 t の関数として求めよ。