北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成16年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題 2 問は必ず解答すること．選択問題は，数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問，計 7 問出題されている．その中から 2 問を選択し，解答すること．解答用紙には科目名と問題番号を記入すること．

平成 15 年 8 月

必答問題 I

問 1　以下の積分を行え。

(a)　$\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx$　　ここで、a は正の実定数

(b)　$\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx$　　ここで、a は正の実定数

(c)　$\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$

ここで、$\boldsymbol{v}=(x-y)\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+(z+x)\boldsymbol{k}$ であり、$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$は直角座標系 (x,y,z) での単位ベクトル、$\boldsymbol{r}$は位置ベクトル $(=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$ で、積分路 C は $(x,y,z)=(0,1,0)$ から (1,0,1) までの、$x=1-y=z^{1/2}$ で表される曲線。

問 2　次の初期値問題を解け。

(a)　$\displaystyle\frac{dx}{dt}+\int_0^t x(\tau)d\tau=0,\qquad x(0)=1$

(b)　$\displaystyle\frac{dx}{dt}+x=\cos t,\qquad x(0)=1$

問 3　行列 $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ を考える。以下のものを求めよ。

(a)　積　AA

(b)　行列式　$|\mathsf{A}|$

(c)　逆行列　A^{-1}

必答問題 II

問 1 地球上のある点から、質量 m の質点を宇宙に向けて速さ v_0 で射出する。地球表面に対して水平および垂直に射出した場合の質点の最大到達距離 (地球中心からの距離) を各々r_h、r_v とし、水平に射出した質点は地球を焦点の一つとする楕円軌道を描くものとする。このとき、$r_v > r_h$ が成り立つことを定性的に説明せよ。ただし、地球の自転効果は無視できるものとする。

問 2 地面に置いた半径 r の円柱型のたらいに深さ h まで水を入れ、たらいを一定の力 f で引いた。しばらくすると、たらいの中の水面は地面に対して角度 θ で傾いて平衡状態に落ち着いた。重力加速度を g、水の密度を ρ として、角度 θ を求めよ。但し、g と ρ は一定で、たらいは軽くその質量は無視できるとする。また、たらいと地面の間の摩擦は考えない。

問 3 空気の密度を ρ とすると、高さ h と $h+dh$ の面の間に生じる圧力差 dp は $dp = -\rho{\cdot}g{\cdot}dh$ となる (g は重力加速度)。g と空気の温度 T が高さによらず一定であるとき、気圧 p を高度 h の関数として表せ。但し、空気は平均分子量 M の理想気体であり、普遍気体定数を R、また地上における気圧を p_0 とする。

選択問題：数学・問題I

問 1　1 の n 乗根は

$$\omega_{n,k} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n) \tag{1}$$

であることを示せ。ここで、$k = 0, 1, \cdots, n-1$ であり、i は虚数単位である。

問 2　z は複素数で $z \neq 1$ とする。このとき、

$$\sum_{m=0}^{n} z^m = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

となることを示せ。

また、式 (1) の $\omega_{n,k}$ について $k \neq 0$ として

$$\sum_{m=0}^{n-1} \omega_{n,k}^m$$

の値を求めよ。

問 3　次を示せ。

$$\sum_{m=0}^{n} \cos mx = \frac{\cos\frac{n}{2}x \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

選択問題：数学・問題II

$\phi(y)$、ω に関する境界値問題

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{H}\frac{d\phi}{dy}\right)+\left(\frac{kf}{\omega H^2}\frac{dH}{dy}-\frac{k^2}{H}\right)\phi=0,$$

$$\phi(0)=\phi(1)=0$$

を考える。ここで、H は y の関数 $H=H(y)$、また k、f は定数パラメータである。このとき、次の問に答えよ。

問 1 この境界値問題は離散的な固有値 ω_n と固有関数 $\phi_n(y)$ $(n=1,2,\cdots)$ を持つ。固有関数は直交条件

$$\int_0^1 \frac{1}{H^2}\frac{dH}{dy}\phi_n\phi_m dy=0,\ \ n\neq m$$

を満たすことを示せ。

問 2 $H=\exp(2\alpha y)$ のとき、固有値 ω_n と固有関数 $\phi_n(y)$ を求めよ。

問 3 問 2 のとき、ω_n と k の関係を図示せよ（縦軸に ω_n, 横軸に k をとること）。また、$|\omega_n|<|f|$ であることを示せ。

選択問題：物理・問題I

時間に依存しない電界強度 $\boldsymbol{E}$ の電場と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場のもとにある、質量 m、電荷 q の粒子の運動は、重力を無視できる場では以下の運動方程式に従う。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = q\left\{\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\right\}. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{v}$ は各々荷電粒子の位置、速度ベクトルである。初期に座標原点から $\boldsymbol{B}$ と直交する方向へ速さ v_0 で射出した粒子の運動について、以下の問に答えよ。但し、$\boldsymbol{B}$ の方向に x 軸を、初速度ベクトルの方向に y 軸を、それらに直交する方向に z 軸をとるものとする。また、$|\boldsymbol{E}| = E$、$|\boldsymbol{B}| = B$ であり、問 1〜問 3 においては $\boldsymbol{E}//\boldsymbol{B}$ であるとする。

問 1　ベクトル積 $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{v}$ を時間と位置の関数として求めよ。

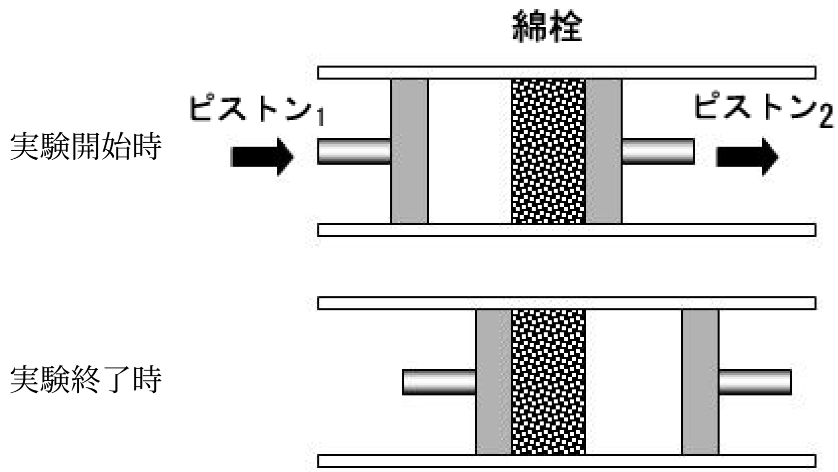
問 2　x 方向、y 方向に各々粒子は等加速度運動および単振動することを示せ。また、そのときの角振動数を求めよ。

問 3　$y - z$ 平面における粒子の軌道の式を導け。

問 4　電場 $\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行ではなく $\boldsymbol{E} = (-2ax, ay, az)$ と与える。ここで、a は定数である。$y - z$ 平面における運動の固有角振動数を求めよ。

選択問題：物理・問題 II

断熱材でできた管の中央に多孔性の綿栓をつめ、左側にピストン 1 を右側にピストン 2 をもつ二つの部屋に分ける。ピストン 1 に圧力を加えた状態で、細孔を通して、気体をゆっくりと右側の部屋へ押し出すとする。この過程における気体の温度変化について考えたい。　ただし、綿栓の中の気体については無視できるものとする。



問 1　この過程ではエンタルピー $H = U + PV$ が保存されることを示せ。ここで U は気体の内部エネルギー、P は圧力、V は体積とする。

問 2　この過程において、圧力変化に対する温度変化を表すジュール-トムソン係数は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{T(\frac{\partial V}{\partial T})_P - V}{C_p} \tag{1}$$

で書き表せる。ここで T は絶対温度、C_p は定圧熱容量とする。このとき $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ および $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$ をそれぞれ T、V、C_p で書き表せ。

問 3　理想気体についてジュール-トムソン係数を求め、管の中の気体が理想気体である場合の温度変化について述べよ。

問 4　状態方程式が

$$V = \frac{RT}{P} - \frac{a}{RT} + b \tag{2}$$

で近似できる気体の場合の温度変化は、ある温度を境にしてその符号が変わる。この温度を求めよ。ここで、a、b はともに正の定数で、T によらない。

選択問題：地球物理学・問題I

次の問の中から、二つ選んで、300 字程度で答えよ。図などを加えてもよい。

(1) 大気中の二酸化炭素の濃度がこのまま増加した場合の 21 世紀末の気候を気候モデルによって予測することが各国の気象機関や研究機関等で行われている。予測に使われる気候モデルはどのようなものであるか、その原理および考慮されているプロセスを含めて説明せよ。またモデルの予測結果にほぼ共通して見られる気温変化の地理的・季節的特徴についても述べよ。

(2) 赤道ケルビン波は大気中でも海洋中でも見られる波である。赤道ケルビン波の構造上の特徴、伝播特性、および大気または海洋中でケルビン波がどのような働きをしているかについて説明せよ。

(3) 大規模な海洋循環は地球の回転の影響も受けている。亜熱帯循環とよばれる大洋規模の流れはどうなっており、どのような風によって形成されているか述べよ。またそこで作用する力学機構について説明せよ。

(4) 南極オゾンホールについて、その季節進行を記述した上で、形成機構を化学的側面、物理学的側面の両面から説明せよ。

(5) 日中の晴天時の空が青く、夕日が赤く見える理由を説明せよ。また比較的薄い雲が白く見える理由を説明せよ。

選択問題：地球物理学・問題II

海水密度は下の図に示すように温度 T と塩分 S によって決まる。ただし T は摂氏温度で、S は千分率であらわされており、圧力は標準大気圧にあるとしている。図中の σ (シグマ) で表わされる数は、海水密度が $(1000 + \sigma)$ kg/m^3 であることを示す。図を用いて、以下の問に答えよ。

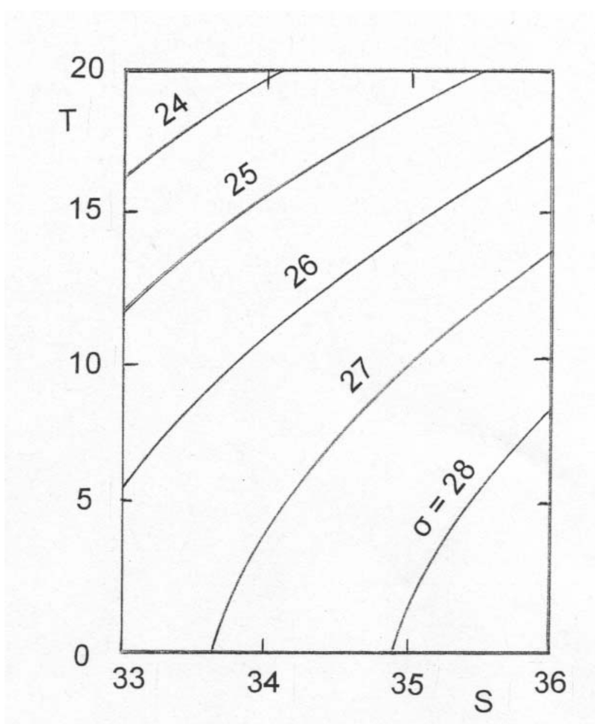
問 1 水温が１０度、塩分が３５の海水の密度を求めよ。その近傍で水温が１度上昇すると密度はどれだけ変わるか。塩分が１増えるとどうなるか。また等密度線が直線ではなく曲がっているのは、温度・塩分へのどのような依存性によるか説明せよ。

問 2 ２種類の海水ＡとＢがある。Ａは水温０度、塩分３４、Ｂは水温２０度、塩分３５とする。それぞれの海水の密度を求めよ。熱と塩分を加えずに、ＡとＢを同量混ぜ合わせて得られる、混合した海水の密度を求めよ。

問 3 問 2 の結果を参考にして、温度と塩分は異なるが密度が等しい 2 種類の海水を混合すると、その海水の密度はどうなるか述べよ。

問 4 亜熱帯海域は太陽放射が強く、また海水の蒸発も盛んである。この両者を分けて考えることにする。海面近くの海水に対して太陽放射だけが増加すると、密度成層（下方向に密度が増え層状になっていること）はどう変わるか。また蒸発だけが増えるとどうなるか。次に太陽放射と蒸発の両方が同時に増加する場合、どのような可能性が考えられるか。温度と塩分に注意して説明せよ。

問 5 亜寒帯海域では大気への熱放出があり、また降雪もある。それらが増加すると、海面近くの密度成層はどのように変る可能性があるか説明せよ。



選択問題：地球物理学・問題III

地球の大気・地表面系の放射エネルギー収支、特に大気の温室効果について考える。

問1 地球放射（または、長波放射、赤外放射）の射出・吸収に関わる気体分子は温室効果気体と呼ばれる。主要な温室効果気体を３つ挙げよ。(なお、いわゆる地球温暖化を引き起こすとされている気体とは必ずしも一致するわけではないことに注意せよ。)

問2 次ページの図１において、地球表面が太陽から受ける単位時間あたりの太陽放射（または、短波放射）エネルギー $[\mathrm{W = J\,s^{-1}}]$ を太陽定数 S_0 $[\mathrm{W\,m^{-2}}]$、惑星アルベド A、地球半径 R [m] を用いて記せ。なお、惑星アルベドとは、地球の大気・地表面系全体の太陽放射に対する反射率である。

問3 図１において、地球が宇宙空間へ射出する単位時間あたりの地球放射エネルギー [W] を記せ。ただし、地球を絶対温度 T_e(有効放射温度) の表面を持つ黒体と仮定せよ。なお、絶対温度 T の黒体による放射 (黒体放射) を全波長域で積分した放射束密度 B(T) $[\mathrm{W\,m^{-2}}]$ は、$B(T)=\sigma T^4$ と表される。ここで、σ $[\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}]$ はステファン・ボルツマン定数である。

問4 問２、問３の結果より、平衡状態を仮定し、T_e を S_0、A、σ を用いて記せ。

問5 次ページの図２に示すような、温度 T_a の大気層と、温度 T_g の地表面を考える。ここで、大気層は、太陽放射を惑星アルベド A にしたがって反射はするが全く吸収せず、地球放射を吸収率 α で吸収し、射出率 ϵ で射出するものとする。地表面は太陽放射を反射しないものとする。大気層、地表面がそれぞれ平衡状態にある時、

(a) 大気層における放射エネルギー収支の式
(b) 地表面における放射エネルギー収支の式

をそれぞれ書き下せ。なお、単位時間あたり単位面積あたりのエネルギー（放射束密度）$[\mathrm{W\,m^{-2}}]$ で示すこと。ここで、地表面が受ける太陽放射の放射束密度 S については、惑星アルベドを考慮した上で T_e を用いて表せ（問２、３により、極めて簡単に表せることに注意せよ)。

問6 問５の結果に基づいて、T_a と T_g を T_e と ϵ で表せ。なお、キルヒホッフの法則 $\epsilon = \alpha$ を用いよ。

問7 問６の結果に基づいて、温室効果を説明せよ。（例えば、ϵ が０の場合や１の場合などについて、それらの意味を踏まえながら考察してみよ。）

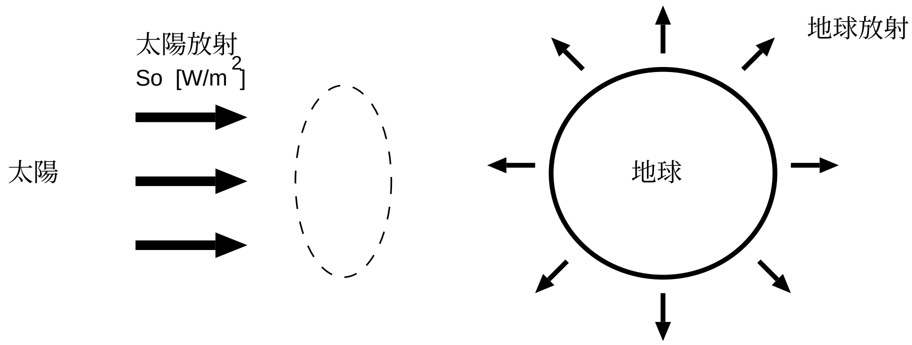

太陽放射
So [W/m2]
太陽
地球
地球放射

図1

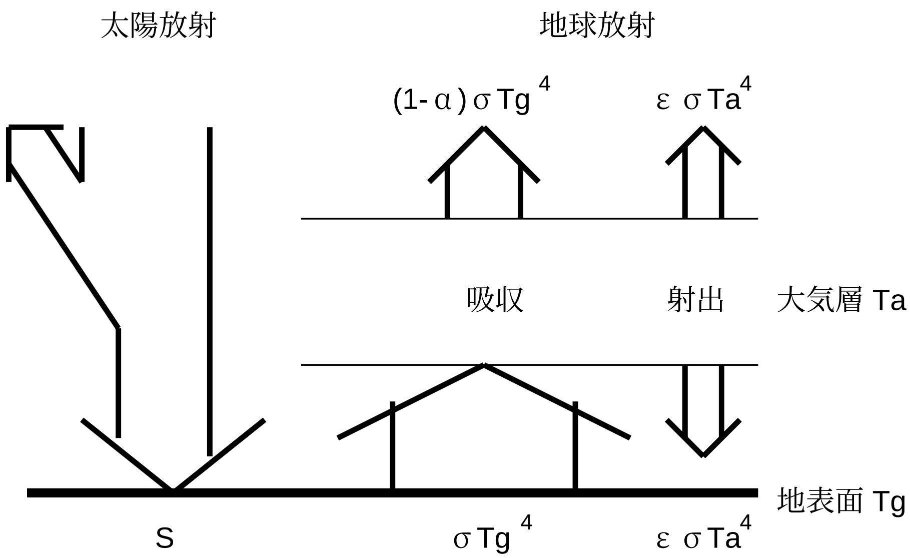

太陽放射
地球放射
(1-α)σTg4
εσTa4
吸収
射出
大気層 Ta
地表面 Tg
S
σTg4
εσTa4

図2