北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成15年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題 2 問は必ず解答すること．選択問題は，数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問，計 7 問出題されている．その中から 2 問を選択し，解答すること．解答用紙には科目名と問題番号を記入すること．

平成 14 年 8 月

必答問題 I

問 1 関数 $\phi(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + z$ を考える。以下のものを計算せよ。なお、$\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。

(a) $\nabla\phi$

(b) $\nabla^2\phi$

(c) $\boldsymbol{k} \times \nabla\phi$

(d) $\nabla \times (\boldsymbol{k} \times \nabla\phi)$

問 2 以下の微分方程式の初期値問題を解け。

(a) $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 0.$

(b) $\dfrac{dx}{dt} + y = 1, \quad \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \qquad x(0) = y(0) = 0.$

問 3 行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ を考える。

(a) 行列 A の固有値および固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を求めよ。

(b) 固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ が直交するための条件を求めよ。

必答問題 II

問 1 宇宙船で緊急事態が発生し、宇宙船の質量の 80%を占める貨物室を居住区から切り放した。貨物室は居住区に相対的に 20m/s で遠ざかった。居住区の速度を求めよ。ただし、宇宙船は貨物室を切り放す前には静止していたとする。

問 2 地表から静止して見える衛星を静止衛星と呼ぶ。その原理を述べよ。さらに、その軌道の地球中心からの距離を求めよ。ただし、地球半径を R、地表面での重力加速度を g、地球の自転周期を T とする。また、万有引力のポテンシャルは距離の逆数に比例する。

問 3 フィギュアスケートのスピンで、腕を大きく広げてゆっくり回転していたスケーターが腕を体に引き付けると回転が速くなる。このことを説明するために、重さの無視できる棒の両端に質量 m の質点を取りつけたものを考える。棒の長さが変化したときの (重心回りの) 回転数の変化について述べよ。また、この時、スケーターは (力学的意味での) 仕事をする必要があるか。もしあるなら、それはどの様な仕事か述べよ。

選択問題：数学・問題I

物理学の世界では、エネルギー最小であるとか、エントロピー最大であるとかという形で、積分や和の極値が重要となることが多い。ここでは、

$$J[u] = \int_0^{x_0} \left\{ u^2 + u'^{\,2} \right\} dx \tag{1}$$

の極値を与える関数 $u(x)$ を、

$$u(0) = 0, \qquad u(x_0) = 1 \tag{2}$$

の条件のもとに求める。ここで、$x_0 > 0$、 $u' = \dfrac{du}{dx}$ である。

$J[u]$ が極値を取る場合には、関数 $u(x)$ を少し変化させても $J[u]$ はほとんど変わらない。すなわち、$J[u]$ の極値を与える関数 $u(x)$ は

$$\delta J = J[u + \delta u] - J[u]$$

とし、δu の 2 次以上の項 (δu^2 や $(\delta u')^2$ など) を無視したときに、任意の $\delta u(x)$ に対して $\delta J = 0$ を満足する。なお、この問題では、δu の 2 次の項が必ず正になるので、この条件を満足するとき $J[u]$ は極小値をとることが分かる。

問 1 δJ を記せ。ただし、δu の 2 次以上の項は無視する。

問 2 $\delta J = 0$ を与える u に関する方程式を導け。ただし、境界条件 (2) があるので、境界での δu はゼロになる。また、$\int_0^{x_0} f(x)g(x)dx = 0$ が、任意の $f(x)$ に対して成り立つ場合には、この区間で $g(x) = 0$ である。

問 3 境界条件 (2) を用い、$\delta J = 0$ を与える $u(x)$ を求めよ。

問 4 上の問題にさらに条件

$$\int_0^{x_0} u(x)\ dx = 1$$

を加えて、$J[u]$ の極値を与える $u(x)$ を求めよ。なお、このような条件が付加された場合には、ラグランジュの乗数法を用いる。すなわち、(1) 式の代わりに

$$\int_0^{x_0} \left\{ u^2 + u'^{\,2} \right\} dx + \lambda \left\{ \int_0^{x_0} u\ dx - 1 \right\}$$

の形を考える。

選択問題：数学・問題 II

方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を考える。これはある波動の伝播を記述する方程式である。ここでは、x 方向には無限に広く、z 方向には $z = 0$ と $z = 1$ に境界があり、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0$$

が満足されているとする。(1) 式の左辺第 1 項には t と z の微分が混在しており、単純な変数分離では解くことができない。そこで、λ_n を固有値とする固有値問題

$$\frac{d^2 A_n}{dz^2} + \lambda_n A_n = 0, \qquad \left.\frac{dA_n}{dz}\right|_{z=0} = \left.\frac{dA_n}{dz}\right|_{z=1} = 0 \tag{2}$$

を考え、固有関数系、$A_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$、を用いて、(1) 式の解を

$$u(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x, t) A_n(z) \tag{3}$$

の形に置いた。これより、$U_n(x, t)$ の方程式、

$$-\lambda_n \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial U_n}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

を得た。以下の問に答えよ。

問 1 $A_n(z)$ と λ_n を求めよ。ただし、$0 < z < 1$ の区間で A_n がゼロになる点の個数を n とする。

問 2 $\lambda_m \neq \lambda_n$ のとき、

$$\int_0^1 A_m(z) A_n(z) dz = 0 \tag{5}$$

となること (直交していること) を示せ。

問 3 (5) 式の関係を用いて、(4) 式を導出せよ。

問 4 $t = 0$ で $U_n = a \sin kx$ であったときの (4) 式の解、$U_n(x, t)$、を記せ。ここで、a と k は正の定数。($a \sin k(x - ct)$ のような形になる)。

問 5 $t = 0$ で

$$u(x, z, 0) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \sin kx \qquad \text{for} \quad 0 < z < 1$$

であったとする。$u(x, z, t)$ を求めよ。((3) 式のような形で、具体的に書く)。

選択問題：物理・問題 I

海抜 0 の陸地にそびえ立つ標高 H の孤立峰は活火山で、その山頂の火口から噴石を激しく吹き上げている。噴石の飛行する軌跡について考察するために、山頂を座標の原点にとり、水平方向に x 座標、鉛直上方に向けて z 座標をとる。陸面は水平で、大気の抵抗や風の効果を無視し、重力加速度の大きさを g とするとき、以下の問に答えよ。

問 1 質量 m の噴石に対して、その座標 x, z の満たす運動方程式を記せ。

問 2 時刻 $t = 0$ に仰角 θ、速さ v_0 で質量 m の噴石が火口から噴出したとする。前問で導いた運動方程式を解き、この初期条件を満たす解を求めよ。

問 3 噴石の軌跡を xz 平面上の方程式として表せ。

問 4 海抜 0 の陸面上における噴石の到達可能な水平距離の最大値 D を求めよ。ただし、噴石同士の衝突はないものとし、陸地に落下した噴石が跳ね返ったり転がったりする効果は無視する。

問 5 噴石には様々な質量のものが存在するが、全ての噴石は噴出時に運動量の大きさが一定値 p_0 をもつものと仮定する。噴火後に散らばっている噴石の分布を調査することにより、この p_0 を推定する方法について考察せよ。

選択問題：物理・問題II

空気中の水分子が凝結し、水滴を形成する過程をギブスの自由エネルギーに基づいて考える。考える系での水分子の総数を N とし、その内 N_V が気体で、残りの N_L が液体になっているとする。また、液体の水は球形の水滴であり、ここでは、簡単のためにそれが 1 個だけ出来たと仮定する。分子 1 個当りの気相と液相におけるギブスの自由エネルギーをそれぞれ μ_V、μ_L とし、形成された水滴が散逸しない様に表面張力で包み込むことに伴う単位面積当りの界面自由エネルギーを σ_{LV} とすると、水蒸気部分と水滴部分それぞれのギブスの自由エネルギーは

$$G_V = \mu_V N_V, \qquad G_L = \mu_L N_L + 4\pi r^2 \sigma_{LV} \tag{1}$$

と書ける。ここで、r は形成された水滴の半径である。この方程式から、系全体のギブスの自由エネルギーとして、

$$G = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho(\mu_L - \mu_V) + 4\pi r^2 \sigma_{LV} + \mu_V N \tag{2}$$

を得た。ここで、ρ は単位体積当りの液体の水の分子の個数である。また、$\mu_L - \mu_V$ は水蒸気圧 p を用いて、

$$\mu_L - \mu_V = -kT \ln(p/p_\infty) \tag{3}$$

と書ける。 ただし、温度 T は一定とし、p_∞ は平らな水面に対し蒸発と凝結が平衡になる水蒸気の蒸気圧 (飽和水蒸気圧) であり、k はボルツマン定数である。以下の問に答えよ。

問 1 (1) 式から (2) 式を導出せよ。

問 2 $p > p_\infty$ と $p \le p_\infty$ の場合に分けて、G のグラフを r の関数として、同一の図に描け。なお、$p > p_\infty$ の場合、G の曲線には極値があるが、その極値 G_c とその時の半径 r_c も求めよ。ただし、凝結によって p は変化しないと仮定する。

問 3 空気中には様々なゆらぎがあり、いろいろな大きさの水滴がそのゆらぎによって作られる。作られた水滴が成長するかどうかを、問 2 で求めた半径 r_c に着目して、議論せよ。

選択問題：地球物理学・問題 I

海洋の流れと密度分布に関する、以下の問に答えよ。

問 1 海洋の深いところでは流れがないとすると、海水の密度分布から海水の流れを求めることができる。

(a) この方法では、ある 2 つの力がバランスするとして流速を求めている。その 2 つの力とは何と何か。

(b) 密度分布がわかっていても、この方法では流速分布が求められない海域がある。それはどこか。また、それはなぜか。

問 2 Fig.1 は、北半球のある大洋の中緯度での、東西断面における、南北方向成分の流速分布（北向きを正）を示したものである。今、2000 m以下では密度の水平勾配はないとし、流れがないときに Fig.2 のような密度分布 (Fig.2 の線は等密度線で、下層ほど密度が大きい）になる場合を考える。問 1 の関係から、以下の問に対し、A-E との位置関係がある程度わかるように、 図示して答えよ。

(a) このとき、海面高度（海面のジオイドからのずれ）の東西分布はどのようになるか。

(b) Fig.1 の流速分布となるような密度分布はどのようなものか。その東西断面の概略を示せ。

(c) 同じ設定・流速分布で南半球の場合、どのような密度分布になるか。

問 3 海洋中の流れを測る方法には問 1 による他にどのような方法があるか。現在、海洋観測で用いられている方法を、2 つ例を挙げて、それぞれその原理がわかるように説明せよ。

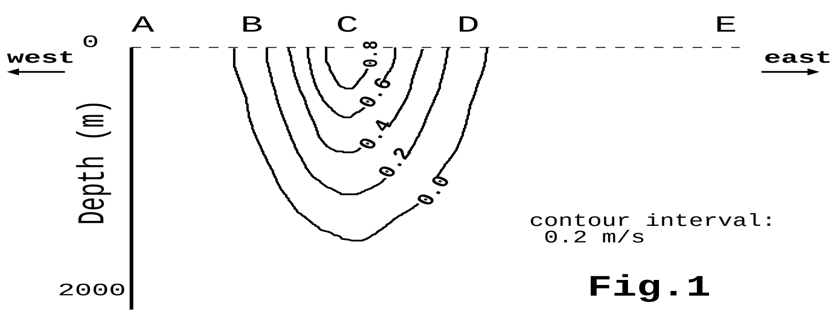

Fig.1

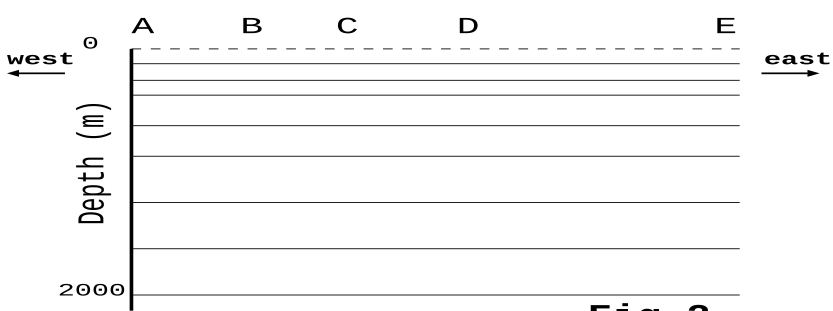

Fig.2

選択問題 : 地球物理学・問題 II

惑星規模の大気運動においては、運動の水平スケールは鉛直スケールに比べ十分に大きいと考えてよい。そこで、いま地球大気を密度一様な一層の流体と仮定する。東西・南北風速を u, v、大気の密度および気圧をそれぞれ ρ, P と表したとき、x, y を東向き、北向きの座標とする局所直交座標系における非粘性大気の運動方程式は、以下のように書ける。

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2}$$

但し、d/dt は全微分で

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \tag{3}$$

であり、f はコリオリ・パラメータで y 方向に変化するものとする。

このような設定のもとで、以下の問に答えよ。

問 1 (1)–(3) 式から、相対渦度の鉛直成分 ζ ($\zeta \equiv \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$) に関する式を導け。

問 2 北半球の中緯度において、次頁の図 1 のような東西に連なる渦列があるものとする。水平風の発散がないとしたとき（すなわち絶対渦度 $\zeta + f$ は保存される）、時間が経つとこの渦列はどの方向へ伝播するか。また、それは何故か。但し、簡単のため背景風の効果は無視してよい。

問 3 水平風の発散があるとき、流体層の厚さ h は時間とともに変化する。この h に関する式と問 1 で導いた方程式から、ポテンシャル渦度 $(\zeta + f)/h$ の保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{h}\right) = 0 \tag{4}$$

が導かれる。

次頁の図 2 は、北緯 40 °–50 ° で平均した陸地の標高 (陰影部分) と、1 月の 500hPa における等圧面高度の経度分布である。等圧面高度に見られる気圧の峰と谷のかなりの部分は、大規模山岳を含む地形によって形成されていると考えられる。ヒマラヤおよびロッキー山脈の風下に気圧の谷 (正の相対渦度) が生じる理由を、ポテンシャル渦度保存の概念を用いて説明せよ。

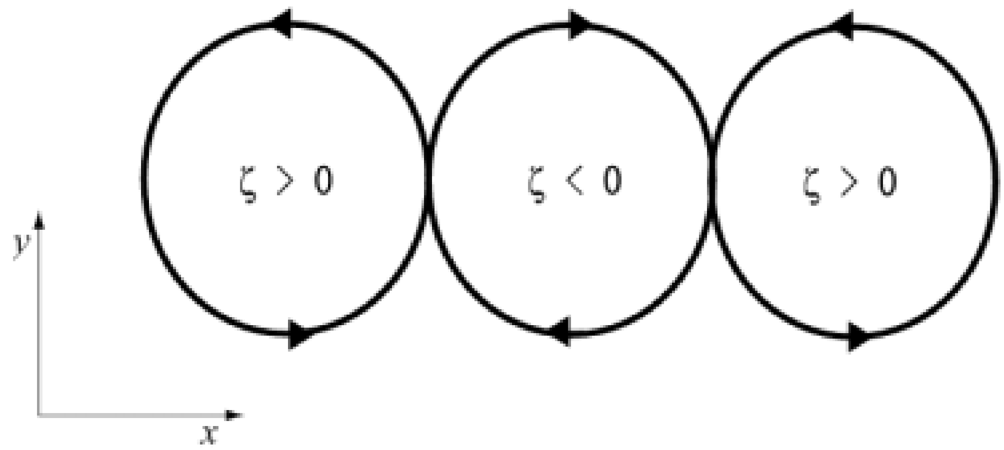
ζ > 0
ζ < 0
ζ > 0
y
x

図 1

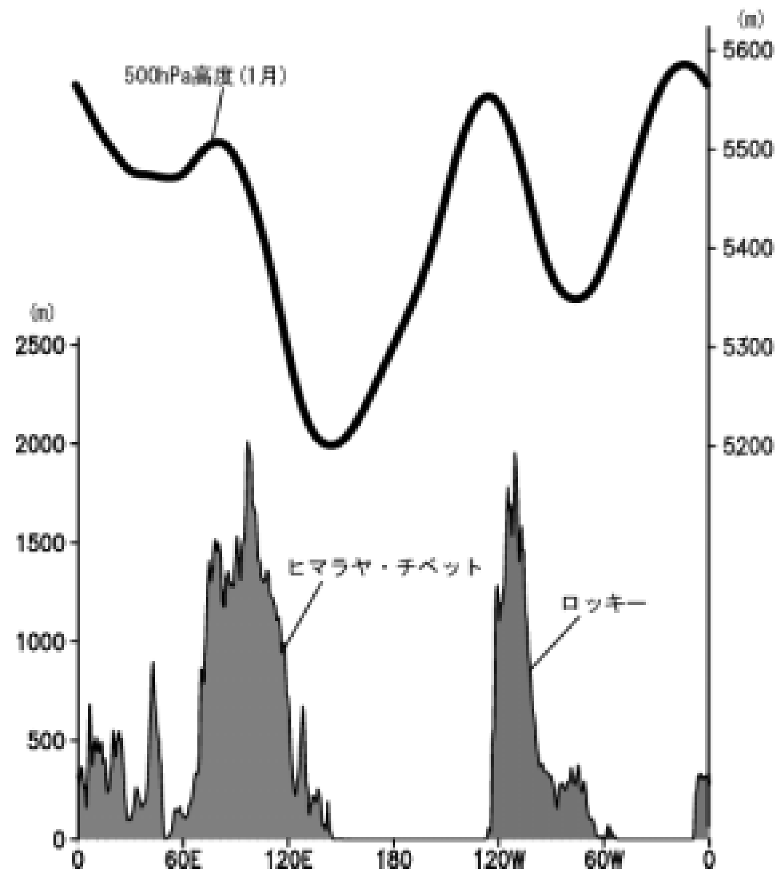
(m)
5600
5500
5400
5300
5200
500hPa高度 (1月)
(m)
2500
2000
1500
1000
500
0
ヒマラヤ・チベット
ロッキー
0
60E
120E
180
120W
60W
0

図 2

選択問題：地球物理学・問題III

電磁波とそれを用いた人工衛星によるリモートセンシングに関する次の問に答えよ。

問 1 (a) 以下のカッコ内のものはすべて電磁波であるが、このように様々な名称で呼ばれるのは、何の違いによるのか。

（マイクロ波、VHF 波、UHF 波、HF 波、X 線、赤外線、紫外線、可視光線）

(b) 地球と太陽が主に射出している電磁波はそれぞれ何か、上記 のカッコ内の中から選べ。

(c) 物体（天体）が主に射出する電磁波の種類は、どういう法則により、物体の何によって決まるか、簡潔に述べよ。

問 2 人工衛星が大気の上端にあるとしたとき、衛星が受け取る地球からの放射（問 1 で選んだ電磁波）は

- 雲頂高度が高い厚い雲で覆われた領域
- 水蒸気や二酸化炭素濃度の高い領域

では減少する。この理由を論ぜよ。

問 3 電磁波を使って、人工衛星から地球上の大気又は海洋を観測する方法を 2 つ例を挙げ、それぞれ以下の点を含めて述べよ。

- どういう電磁波を使うか
- 能動センサーを用いるか受動センサーを用いるか
- 大気あるいは海洋のどういう物理量を測るのが目的か
- どういう原理で測るか
- どういう現象がわかるか