北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成14年度大学院修士課程(2次募集)試験問題

専門科目

数学・物理学(古典物理学)より計4問出題されている。その全てに解答すること。解答用紙には科目名と問題番号を記入すること。

平成14年2月

専門・問題I

問 1 次の定積分の値を求めよ。

(a) $\int_1^2 x^2 \log_e x dx$

(b) $\int_0^1 (2+x)\sqrt{1-x^2}dx$

問 2 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、大きさが a で z 軸の正の方向を向くベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする。また、ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$ と定義するとき、以下のものを計算せよ。

(a) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$

(b) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$

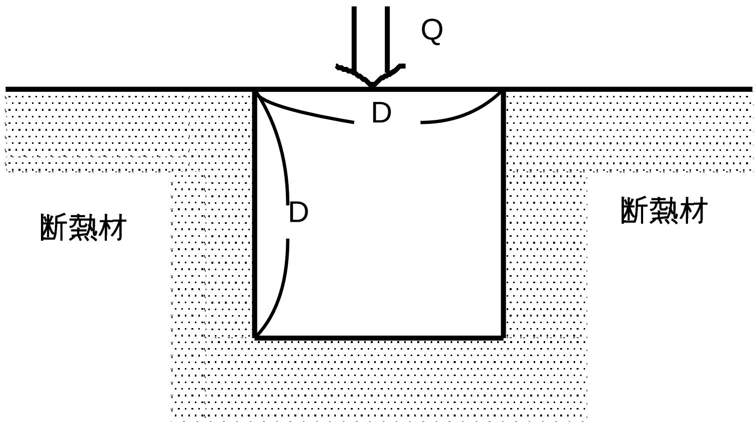
問 3 次の式を満たす複素数 z を求めよ。ただし、i は虚数単位とする。

(a) $z^2 = 1 + i$

(b) $\cos z = 2$

専門・問題 II

下図に示すように、立方体の物体の一面に、熱流束 Q(一定) の放射熱が注いでいる。放射熱が注ぐ面をのぞいてすべて断熱材で覆われている。物体の断熱材で覆われていない面から絶対温度の 4 乗に比例する熱が外部に放射される。この比例係数を k、物体の一辺を D、密度を ρ、比熱を C として、以下の問いに答えなさい。ただし、熱は物体中を充分に速く伝導するので、物体の絶対温度 T は一様と仮定する。



問 1 物体の絶対温度 T に関する方程式を表しなさい。ただし、時間を t とする。

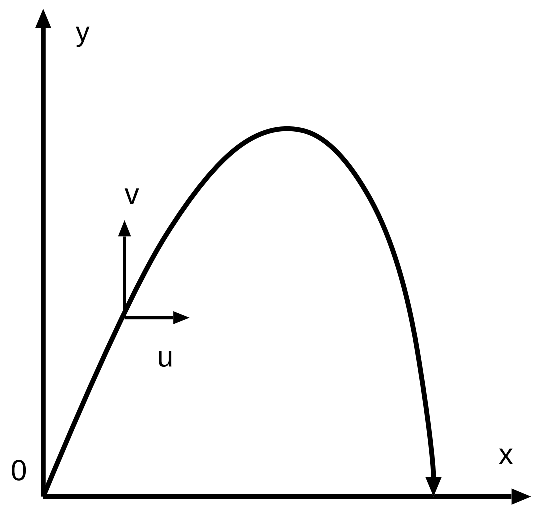
問 2 充分に時間がたつと物体は平衡温度に達する。平衡温度を k、D、ρ、C、Q を用いて表しなさい。

問 3 それぞれの値を、$k = 10^{-5}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$、$D = 10$ m、$\rho = 10^3$ $\mathrm{kgm^{-3}}$、$C = 10^3$ $\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$、$Q = 10^3$ $\mathrm{Wm^{-2}}$ とするとき、平衡温度を求めなさい。

また初期温度を $T = 0\mathrm{K}$ としたときに、物体の温度がこの平衡温度に近づく様子の概略を、めやすとなる時間と温度の数値も入れてグラフに表しなさい。

専門・問題 III

ある物体を下図に示すように水平速度 u_0、鉛直速度 v_0 で投げ上げる。物体には重力と、速度に比例する空気抵抗が働いている。この物体の質量を m、重力加速度を g、抵抗係数を r とするとき、以下の問いに答えなさい。



問 1 物体の運動方程式を示しなさい。ただし、水平位置を x、鉛直位置を y、時間を t とする。

問 2 速度 (u, v) と位置 (x, y) を u_0、v_0、m、g、r、t を用いて表しなさい。

問 3 抵抗が小さいとすると、$rv_0/(mg)$ が 1 より充分小さくなる。物体がふたたび着地する地点 $(y = 0$ となる地点$)$ の x の値と、それまでの飛行時間を、$rv_0/(mg)$ の 1 次までの近似式で求めなさい。そして求めた式をもとに、着地点と飛行時間に対する抵抗の影響を述べなさい。

専門・問題IV

次の連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left\{a+(x^2+y^2)\right\}x-y \\ \frac{dy}{dt} &= -\left\{a+(x^2+y^2)\right\}y+x \end{aligned} \tag{1}$$

の解の振る舞いを調べる。ただし、a は実数パラメタとする。

問 1 変数変換

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

によって、r と θ が満たす方程式を導け。

問 2 原点 $(x,y)=(0,0)$ が式 (1) の定常点であることを示せ。また、式 (1) を原点付近で線型化した次の方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax-y \\ \frac{dy}{dt} &= -ay+x \end{aligned} \tag{2}$$

の解を求め、パラメタ a に対する解の振る舞いの依存性を調べよ。

問 3 式 (1) の解軌道の概略を $x-y$ 平面上で図示せよ。定常点や周期軌道などの特徴的な解構造の存在を、パラメタ a に関して分類せよ。