北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成13年度大学院修士課程入学試験 (2 次募集) 問題
専門科目

数学, 物理学 (古典物理学) より計 4 問出題されている. その全てに解答すること. 解答用紙には科目名と問題番号を記入すること.

平成 13 年 2 月

専門・問題 I

問 1 次の定積分の値を求めよ。

(a) $$\int_0^\infty e^{-x}\sin \pi x dx$$

(b) $$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\sin \pi x dx$$

問 2 直交直線座標系における (x, y, z) それぞれの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする。

(a) ベクトル $\boldsymbol{u} = (-y, x, 0)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を用いて表せ。

(b) $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ と $\nabla \times \boldsymbol{u}$ を計算せよ。

(c) $z = 0$ の平面上に原点を中心とする半径 1 の円を考える。その円周に沿って反時計回りに一回りする以下の積分の値を求めよ。

(i) $$\oint \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s} ds$$

(ii) $$\oint \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} ds$$

ここで、$\boldsymbol{s}$ は円周に沿う方向の単位ベクトルを、$\boldsymbol{n}$ は円周と直交する (x, y) 平面内の外向きの単位ベクトルを表す。

専門・問題 II

問 1 次の微分方程式の初期値問題を解け。

(a) $$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

(b) $$\frac{dx}{dt} + y = e^t, \qquad \frac{dy}{dt} - x = 0, \qquad x(0) = y(0) = 0$$

問 2 力学に関する以下の問に答えよ。

(a) 宇宙空間のある点 O を中心とする半径 R の円周上を一定の速さで運動する質量 m の物体を考える。一回りするのに要した時間は T であった。この物体に働いている力 (大きさと方向) を求めよ。

(b) 摩擦のない平らな面上に置かれた質量 m_1 の物体 1 と, 質量 m_2 の物体 2 を考える。物体 1 を速度 v_0 で静止状態にある物体 2 に衝突させたところ, 物体 2 は物体 1 が衝突前に動いていたのと同じ方向に動いた。衝突に際して力学的エネルギーが保存するとして、衝突後の物体 1 と物体 2 の速度を求めよ。また、力学的エネルギーが衝突に際して幾らか失われるとしたとき、衝突後のそれぞれの速度は力学的エネルギーが保存する場合とどう異なるか述べよ。

(c) 自動車のブレーキをかけてから止まるまでの距離 (制動距離) はブレーキをかける前の車の速度の 2 乗に比例すると言われている。ブレーキをかけることにより一定の摩擦力が働くとしてこのことを示せ。

専門・問題III

質量 M, 半径 a の均質な材質で作られた厚さが一様な円板を考える。この円板は, その中心を通り, 円板に垂直な鉛直軸のまわりに自由に回転できる。また、この鉛直軸は空間中に固定されており、円板の中心は動かないとする。

問 1 この円板の鉛直軸のまわりの慣性モーメント I は

$$\frac{1}{2}Ma^2$$

と表せることを示せ。

問 2 初期に静止していたこの円板の中心に質量 m の昆虫を置いたところ, この昆虫は真っ直ぐに円板の縁にある A 点まで歩き, 縁に沿って反時計回りに円板を一周し, A 点に戻り, さらに, 真っ直ぐに円の中心に戻った。この間に円板はどちら向きにどれだけ回転したか。

専門・問題IV

偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \mathsf{A}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{U} = 0 \tag{1}$$

を考える。ここで, $\boldsymbol{U}$は 2 次元のベクトル

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

A は 2×2 の定数行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

であり, かつ,

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$$

とする。

問 1 行列 A の固有値を求めよ。

問 2 2 つの固有値を λ_j (j は 1 もしくは 2) としたとき,

$$\mathsf{A}\boldsymbol{R}_j = \lambda_j \boldsymbol{R}_j, \qquad \boldsymbol{L}_j \mathsf{A} = \lambda_j \boldsymbol{L}_j$$

を満足するベクトル $\boldsymbol{R}_j$, $\boldsymbol{L}_j$ をそれぞれ, 右固有ベクトル, 左固有ベクトルと呼ぶ。$m \neq n$ の時 (m, n は 1 もしくは 2), $\boldsymbol{R}_m$ と $\boldsymbol{L}_n$ は直交することを示せ。

問 3 (1) 式の解 $\boldsymbol{U}(x,t)$ を

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_1\phi_1(x,t) + \boldsymbol{R}_2\phi_2(x,t)$$

と置いたとき, $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$ は, それぞれ,

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} = 0$$

に従うことを示せ。

問 4 問 3 の方程式を満足する ϕ_j (ここで、j は 1 もしくは 2) は, $t-x$ 面上での傾き λ_j の直線

$$x = \lambda_j t + x_0$$

上で一定値をとることを示せ。ただし, x_0 は任意の実定数。

問 5 (1) 式を初期条件 $\boldsymbol{U}(x,0) = \boldsymbol{U}_0(x)$ の下に解き、$\boldsymbol{U}(x,t)$ を, $\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, $\boldsymbol{L}_2$, λ_1, λ_2 等を用いて表せ。