北海道大学大学院地球環境科学研究科
大気海洋圏環境科学専攻
大循環力学講座・気候モデリング講座・極域大気海洋学講座

平成13年度大学院修士課程入学試験問題
専門科目

必答問題 2 問は必ず解答すること．選択問題は，数学 2 問・物理学 2 問・地球物理学 3 問，計 7 問出題されている．その中から 2 問を選択し，解答すること．解答用紙には科目名と問題番号を記入すること．

平成 12 年 8 月

必答問題 I

問 1 位置ベクトル $\mathbf{r}$ を考える。$r = |\mathbf{r}|$ で、$\mathbf{r}$ は直角座標上で成分表示すると (x, y, z) である。定ベクトル $\mathbf{C}(= (a, b, c))$ として、以下のものを計算し、$\mathbf{r}$, r, $\mathbf{C}$ を用いて表せ。

(a) $\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{C})$

(b) $\nabla \cdot (r\mathbf{C})$

(c) $\nabla \times (r\mathbf{C})$

(d) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\mathbf{C} \times \mathbf{r}}{r} \right)$

問 2 直線上で点 0 からの距離を x とする。時間を t で表わすと、速度は $\dfrac{dx}{dt}$ となる。物体 A が $t = 0$ において点 0 にあるとする。この時、以下の条件に合う x についての微分方程式を書きなさい。次にその微分方程式を解いて、x を t で表わしなさい。

(a) 速度が、a(一定) の場合。

(b) 加速度が、g(一定) の場合。但し、$t = 0$ において速度は 0 とする。

(c) 加速度が、g より速度の k 倍だけ小さい $(g - k\dfrac{dx}{dt})$ 場合。但し、$t = 0$ において速度は 0 とし、k は正の定数とする。

(d) 加速度が、$c \sin \omega t$ より速度の k 倍だけ小さい場合。但し、$t = 0$ において速度は 0 とし、c、ω と k は正の定数とする。

必答問題 II

問 1 以下の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int \tan x \ dx$

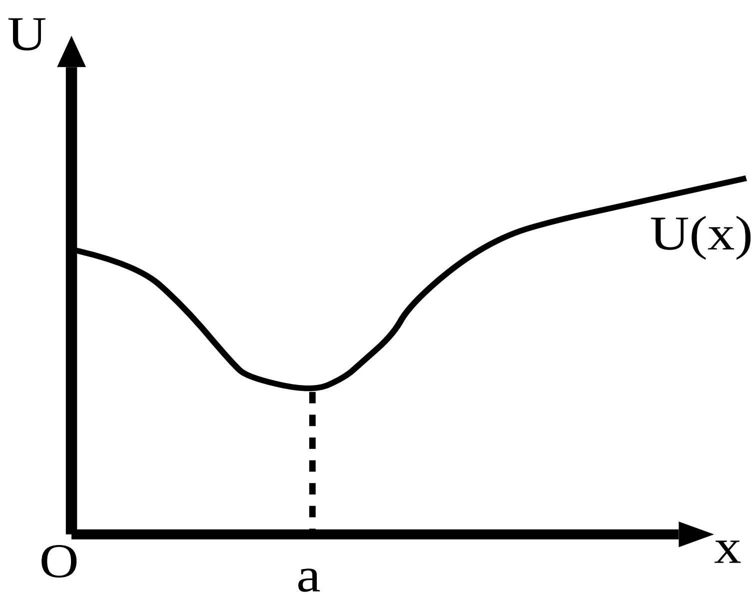
(b) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x \ dx$

問 2 下図のようなポテンシャル $U(x)$ で表わされる保存力が、質量 m をもつ質点に働いている。その質点は、$U(x)$ が極小となる点 $x = a$ の近傍で微小振幅の単振動を行っている。$U(x)$ の x に関する 1 階微分を $U'(x)$、2 階微分を $U''(x)$、…、と表わすことにする。以下の問に答えよ。

(a) $U(x)$ を $x = a$ の近傍で Taylor 級数で $(x-a)^3$ の項まで表せ。

(b) 質点の運動方程式を示せ。なお、質点が単振動をしていることから分かるように、$U(x)$ の $(x-a)^3$ の項以降は無視できる。

(c) 単振動の周期 T を求めよ。



選択問題： 数学・問題 I

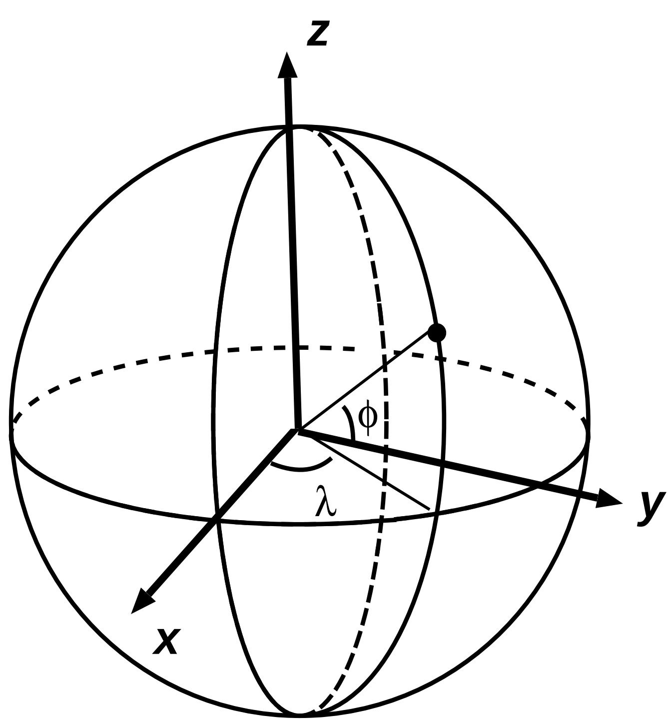
半径 a の球面上の点について、以下の問に答えよ。

問 1 球の中心を原点として、赤道上 (緯度 0) の経度 0 の方向が x 軸、同じく赤道上の経度 $\pi/2$ 方向が y 軸、北極 (緯度 $\pi/2$) 方向が z 軸、という直角座標系を取る。このとき、経度 λ、 緯度 ϕ の点の座標 (x, y, z) を求めよ。

問 2 z 軸を中心にして、この球面を、z 軸の正方向から見て反時計回りに角度 θ 回転させる。この際、球面上の点 (x, y, z) が移る先を (x', y', z') とする。この、ベクトル (x, y, z) をベクトル (x', y', z') に変換する 3×3 の行列を示せ。

問 3 点 1 と点 2 の経度・緯度座標をそれぞれ (λ_1, ϕ_1) と (λ_2, ϕ_2) とする。点 1 から点 2 までの球面に沿った最短経路を求めよ。すなわち、球面に沿った最短距離と、その最短距離で動くときに点 1 から出発するべき方向 (北から時計まわりに計った角度) を求めよ。

(ヒント: まず z 軸のまわりに回転し、さらに y 軸のまわりに回転することで、点 1 を北極に移動させよ。)



選択問題：数学・問題 II

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

として表される分布をガウス分布 (正規分布) という。この分布の平均は μ、分散は σ^2 であることを数学的に証明せよ。ただし、

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

を用いよ。

選択問題： 物理・問題 I

半径 r_0 長さ L の円筒状の管を流れる密度一定の流体の流量について考える。内壁との粘性抵抗のために、定常状態では、管の中の流体の速度 u は断面の中心で最大、壁面で 0 となり、

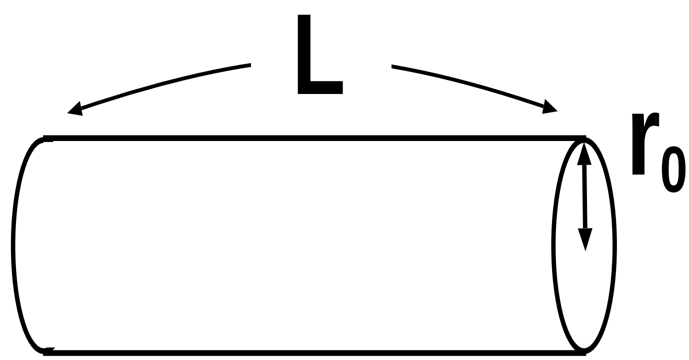
$$u = u_m \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2}$$

という速度分布をしている。ここで r は管の断面の中心からの距離、u_m は中心における流速 (一定値) である。このとき、以下の問いに答えよ。

問 1 内壁にかかる粘性抵抗は単位面積あたり $\rho\nu\dfrac{du}{dr}$ (ρ は流体の密度、ν は粘性係数、それぞれ一定値とする) である。流体が内壁全体から受ける粘性抵抗力 F_r を求めよ。

問 2 管の入口における圧力を p_1、出口における圧力を p_2 (p_1, p_2 は一定値) として、管の中の流体にかかる力のつりあいの式を立てよ。

問 3 この管を通過する流量 Q を p_1 と p_2 を用いて求めよ。



選択問題： 物理・問題 II

地面に置かれた十分重い密閉された立方体の箱があり、その中は真空に保たれている。その中で質量 m の粒子が 1 個運動している。粒子は斜めに運動しており、天井に衝突する直前の速度ベクトルは、大きさ v で水平となす角は α である。箱の内壁に衝突する際には、運動エネルギーを失うことなく、瞬間的に運動の向きを変えるものとする。重力加速度を g、箱の天井と底面の間 (内壁間) の距離を h とする。以下の問いに答えよ。

問 1 粒子が底面に衝突する直前の速度の鉛直成分を求めよ。

問 2 粒子は天井に単位時間あたり何回衝突するか。

問 3 この粒子が天井および底面に衝突するときの力積をそれぞれ求めよ。

問 4 十分長い時間にわたって平均したとき、粒子が箱を通して地面に与える力はどうなるか。以上の結果を用いて計算し、説明せよ。

選択問題： 地球物理学・問題 I

次の語句の中から 2 つ選んで、地球物理学的観点から、そのメカニズムや物理的根拠を含めて、それぞれ 400~800 字程度で説明せよ。

- 温室効果
- ポテンシャル渦度
- 準二年振動 (QBO)
- モンスーン
- 西岸境界流
- 沿岸湧昇

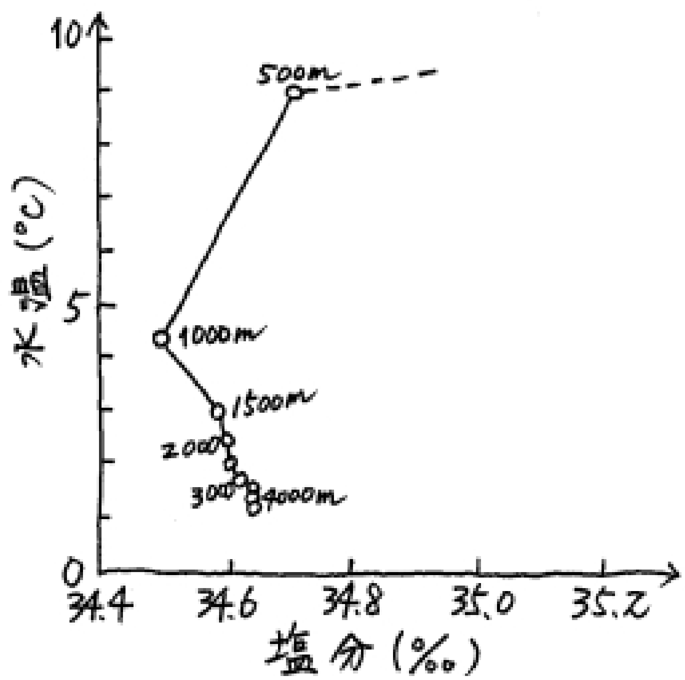
選択問題： 地球物理学・問題 II

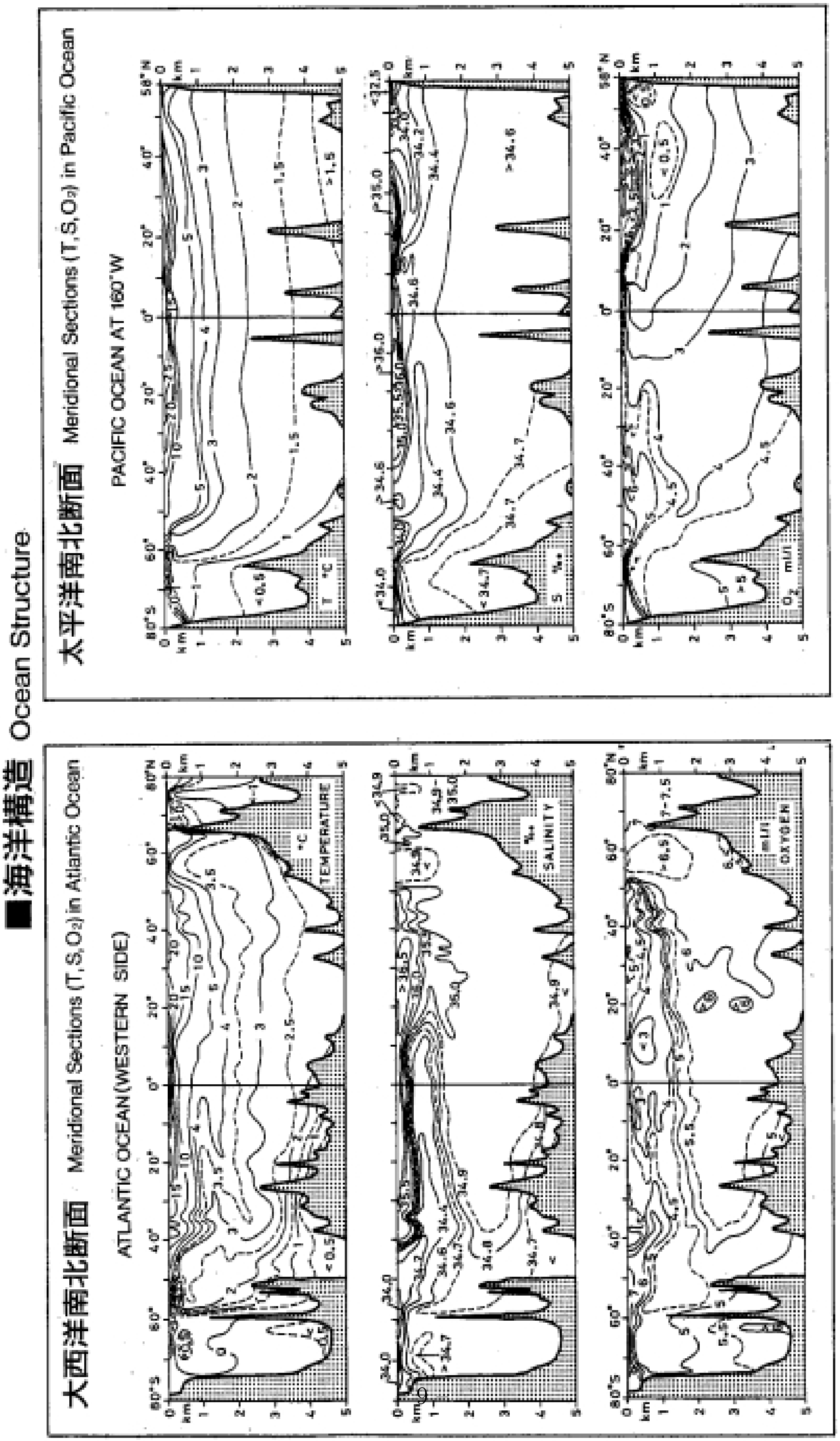
次のページの図は、大西洋 (左) と太平洋 (右) の、温度 (T)、塩分 (S)、溶存酸素 (O_2) の南北断面である。以下の設問に答えよ。

問 1 T と S の構造 (温度と塩分の南北断面) において、両大洋に共通する主な特徴を 3 つ挙げ、それぞれの成因について簡潔に説明せよ。

問 2 両大洋の北緯 35 度における 500m 以深の温度–塩分関係図を、下図の例 (太平洋の赤道の場合) を参考にして描け。これをもとに、両地点の T/S 構造の違いを述べよ。

問 3 溶存酸素 (O_2) の図の濃度分布を参照しながら、両大洋にまたがる海洋循環について説明せよ。




■海洋構造 Ocean Structure
大西洋南北断面 Meridional Sections (T,S,O2) in Atlantic Ocean
ATLANTIC OCEAN (WESTERN SIDE)
TEMPERATURE
SALINITY
OXYGEN
太平洋南北断面 Meridional Sections (T,S,O2) in Pacific Ocean
PACIFIC OCEAN AT 160°W

選択問題：地球物理学・問題 III

次のページの図 1〜3 は、大気の東西風速 u、 南北風速 v、温度 T、の年平均、東西平均値の分布 (気圧座標系での南北・鉛直断面) である。この図を参考にして以下の問いに答えよ。ただし、y を緯度方向の距離 ($y = a\varphi$、a は地球半径 =6370km、φ は緯度 [rad])、p を気圧とし、地球の曲率の効果は無視する。項の大きさを見積もる際には、有効数字 1 桁で十分だが、見積もった根拠をわかりやすく書くこと。

問 1 900hPa 付近において、p 座標系での鉛直流 $\omega \equiv \dfrac{dp}{dt}$ の東西平均値はどのような南北分布になるか。図 2 を参考にして、横軸を緯度、縦軸を ω として南緯 30 度から北緯 30 度の範囲で概略の図を描け。ただし、この付近の東西平均の ω の大きさは高々 1×10^{-4}hPa/s 程度であることを用いてよい。

問 2 東西平均の東西風に関する運動方程式は以下のように表される。ここで、k を含む項は大気中の乱流等による減速効果を示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \omega\frac{\partial u}{\partial p} - fv = -ku \tag{1}$$

この式の、対流圏下層の 900hPa、緯度 25 度付近における、k を含む項以外の各項の大きさを見積もれ。ただし、定常 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) を仮定して左辺第一項は省いてよい。また、この緯度での f は $5 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$ を用いよ。

問 3 問 2 の結果を用いて、対流圏下層での k の値はどの程度かを単位を含めて示せ。

問 4 東西平均の南北風に関する運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \omega\frac{\partial v}{\partial p} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - kv \tag{2}$$

また、静水圧の方程式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \tag{3}$$

のように与えられる。ただし、ϕ はジオポテンシャル、R =287J kg^{-1} K^{-1} は大気の気体定数である。この 2 つの式から ϕ を消去することにより、u, v, ω, T の間に成り立つ式を導け。

問 5 問 4 で求めた式において、定常の場合に、u と T とを含む二つの項だけのつりあいがほぼ成り立っていることを、850hPa、緯度 25 度付近での各項の大きさを見積もることによって確かめよ。ただし、k は 問 3 で得られた値を用いよ。また、このつりあいを何と呼ぶか答えよ。

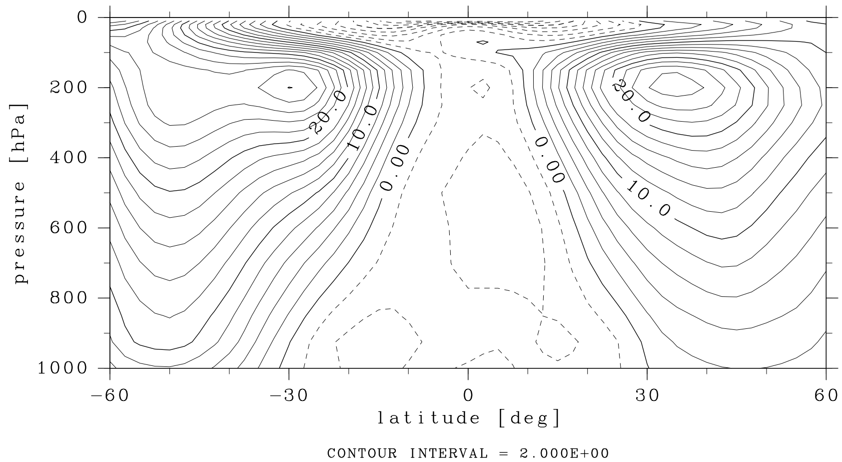


図 1： 東西平均した東西風の緯度・気圧分布。等値線間隔 2m/s。点線は負の値 (東風)。

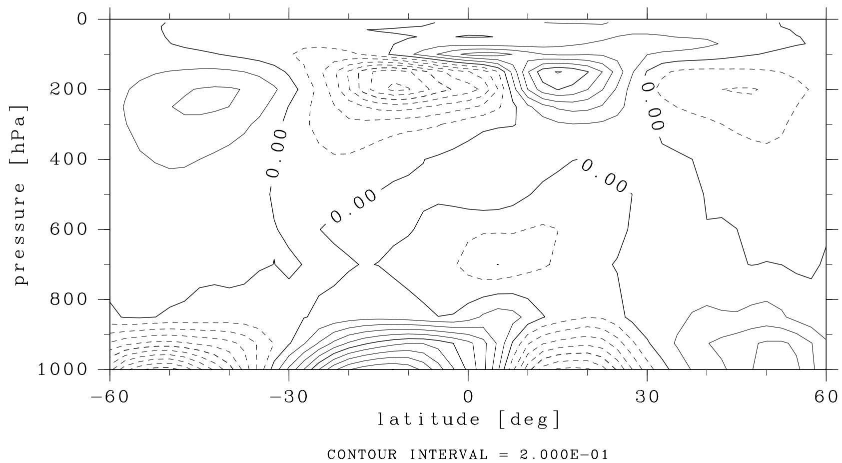


図 2： 東西平均した南北風の緯度・気圧分布。等値線間隔 0.2m/s。点線は負の値 (北風)。

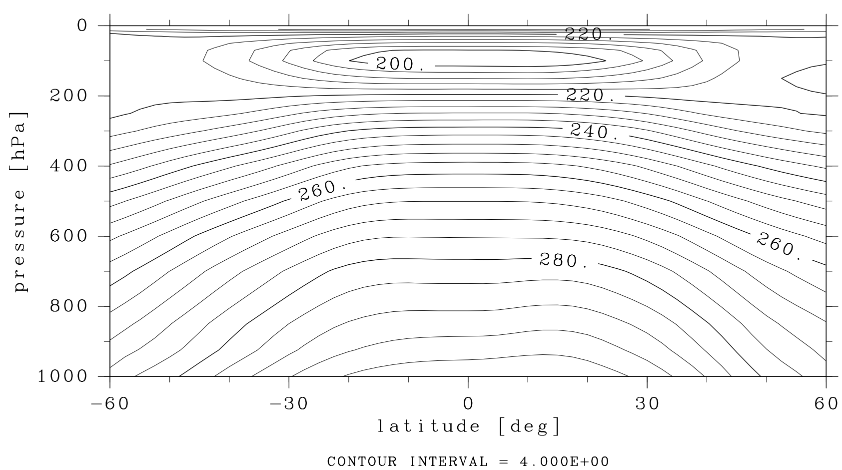


図 3： 東西平均した温度の緯度・気圧分布。等値線間隔 4K。